

Determinantes. Rango e inversas

En esta práctica veremos cómo los determinantes nos proporcionan una herramienta que mejora distintos cálculos. En concreto, haremos un resumen de los distintos métodos que hemos visto para obtener el rango de una matriz y el estudio de matrices regulares y el cálculo de sus inversas.

Como sabemos, el determinante de una matriz cuadrada se calcula mediante la función **Det[matriz]**. Por ejemplo:

Ejemplo 3.1. Calcular el determinante de la matriz cuadrada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

In[] := **A={{1,2,3},{2,3,4},{3,4,6}};**
 Det[A]

Out[] := -1



1. CALCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, nos proponemos calcular el rango de A . Como sabemos el **rango** de A , $\text{rg}(A)$, es el número de filas no nulas de su forma normal de Hermite por filas (= número de pivotes). Además si A tiene n filas y m columnas sabemos que $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Ejemplo 3.2. Calcular el rango de la matriz cuadrada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

In[] := **A={{1,2,3,4,1},{2,2,1,1,1},{3,4,4,5,2},{1,0,3,2,0}};**
 RowReduce[A]//MatrixForm

$$\text{Out[]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto podemos decir que el rango de esta matriz es 3. ■

Como es conocido los determinantes nos proporcionan un método para calcular el rango de una matriz.

Teorema Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces el rango de A coincide con el mayor orden de una submatriz cuadrada regular de A .

Este teorema nos proporciona el método para calcular el rango de A . Tomamos $k = \min\{m, n\}$, luego $\text{rg}(A) \leq k$, tomadas todas las submatrices cuadradas de A de orden k , si alguna es regular $\text{rg}(A) = k$, en otro caso $\text{rg}(A) \leq k-1$ y se repite el proceso con $k-1$ y así sucesivamente.

Esto lo haremos con el Mathematica usando la orden **Minors[matrix, k]**, que nos genera una matriz de orden $\binom{m}{k} \times \binom{n}{k}$ cuyos elementos son los menores de orden k de “matrix” siendo m y n el número de filas y columnas respectivamente, de “matrix”.

Así, para calcular el rango comenzaremos calculando los menores de orden $k = \min\{m, n\}$ y si todos son ceros reduciremos k hasta encontrar algún menor distinto de cero. Por ejemplo:

Ejemplo 3.3. Calcular el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[]:= A={{1,2,3,4,1},{2,2,1,1,1},{3,4,4,5,2},{1,0,3,2,0}};
n=Dimensions[A][[1]];
m=Dimensions[A][[2]];
k=Min[n,m];
Minors[A,k]
```

```
Out[] = {{0,0,0,0,0}}
```

```
In[]:= Minors[A, k-1]
```

```
Out[] = {{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0},{-10,-10,0,10,5,5,10,0,0,5},
{-10,-10,0,10, 5,5,10,0,0,5},{10,10,0,-10,-5,-5,-10,0,0,5}}
```

Como ya hemos encontrado menores de orden $k-1$ distintos de cero se tiene que el rango de A es $k-1$:

`In[]:= k-1`

`Out[] = 3`



Vamos ahora a usar la orden `Module` para crear un nuevo comando que llamaremos **rango** y que nos calculará el rango de una matriz usando el cálculo de menores como en lo anterior:

```
rango[A_]:=Module[{n,m,s},
    n=Dimensions[A][[1]];
    m=Dimensions[A][[2]];
    k=Min[n,m];
    If[n==m && Det[A]!=0,
        Print[" El rango de esta matriz es ", k ],
        For[i=k, i>=1,i--,s=Minors[A,i];
            If[s!=Table[0,{j1,Dimensions[s][[1]]},{j2,Dimensions[s][[2]]}],
                Print[i];Break[] ] ] ]
```

Ejemplo 3.4. Calcular el rango de la matriz del ejercicio anterior usando la orden que acabamos de definir:

```
In[]:= rango[A_]:=Module[{n,m,s},
    n=Dimensions[A][[1]];
    m=Dimensions[A][[2]];
    k=Min[n,m];
    If[n==m && Det[A]!=0,
        Print[" El rango de esta matriz es ", k ],
        For[i=k, i>=1,i--,s=Minors[A,i];
            If[s!=Table[0,{j1,Dimensions[s][[1]]},{j2,Dimensions[s][[2]]}],
                Print[i];Break[] ] ] ]
```

`In[]:= A={{1,2,3,4,1},{2,2,1,1,1},{3,4,4,5,2},{1,0,2,3,0}};`
`rango[A]`

`Out[] = 3`



En Mathematica existe una orden que nos lo calcula directamente:

MatrixRank[A]

Por ejemplo:

Ejemplo 3.5. Calcular el rango de la matriz del ejercicio 3.3 usando la orden `MatrixRank[]`:

```
In[]:= A={{1,2,3,4,1},{2,2,1,1,1},{3,4,4,5,2},{1,0,3,2,0}};
MatrixRank[A]
```

```
Out[] = 3
```



El siguiente teorema nos ayudará a discutir un sistema, es decir, nos dirá si el sistema tiene o no solución sin resolverlo:

Teorema (Rouché-Frobenius) Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas con matriz de coeficientes A y matriz ampliada $(A|B)$ se verifica:

1. El sistema es incompatible si y sólo si, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|B)$.
2. El sistema es compatible determinado si y sólo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = n$.
3. El sistema es compatible indeterminado si y sólo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) < n$.

Ejemplo 3.6. Discutir el sistema siguiente:

$$\begin{array}{rrcr} x & + & y & & = & 1 \\ & & - & y & + & 2z & = & -1 \\ x & & & & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

```
In[16]:= A={{1,1,0},{0,-1,2},{1,0,2}};
Ampl ={{1,1,0,1},{0,-1,2,-1},{1,0,2,0}};
MatrixRank[A]
MatrixRank[Ampl]
```

```
Out[16] = 2
```

```
2
```

Por tanto, el sistema es compatible e indeterminado.



2. MATRICES REGULARES. INVERSE[A]

Como sabemos no todas las matrices tienen inversa. Llamamos matriz regular a toda matriz cuadrada que admite inversa; es decir, es aquella que es una unidad dentro del anillo de las matrices cuadradas. Así, para que una matriz sea regular es necesario que sea cuadrada y de rango máximo, con Mathematica ambas cosas se pueden comprobar con facilidad. En primer lugar, si fuese necesario, usaremos la orden

Dimensions[A]

para calcular el número de filas y columnas que tiene nuestra matriz, la salida será un vector de dos coordenadas que indican el número de filas y de columnas por tanto si las dos coordenadas coinciden la matriz A será cuadrada, además usando la orden

Det[A]

calcularemos el determinante de la matriz A y si es distinto de cero la matriz A es regular y podremos calcular su inversa con la orden

Inverse[A]

Por último para comprobar que la matriz obtenida es realmente la inversa de A basta con multiplicar A y la matriz obtenida y ver que el producto es la identidad. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.7. Calcular, en caso de ser regular, su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:=      A={{1,2,-1},{0,-2,1},{2,1,-1}};
              Dimensions[A]
```

```
Out[ ]:=     {3, 3}
```

Por tanto, vemos que es cuadrada. Veamos si es regular calculando su determinante

```
In[ ]:=      Det[A]
```

```
Out[ ]:=     1
```

Como es distinto de cero, podemos calcular su inversa:

```
In[ ]:=      Inverse[A]
```

```
Out[ ]:=     {{1,1,0},{2,1,-1},{4,3,-2}}
```

En efecto:

```
In[ ]:=      A.Inverse[A]==IdentityMatrix[3]
              Inverse[A].A==IdentityMatrix[3]
```

```
Out[ ]:=     True
              True
```



Otro método que vimos en la práctica anterior para el cálculo de la inversa fue el que utilizábamos transformaciones elementales: Teniendo en cuenta que para toda matriz regular, su forma de Hermite por filas es la matriz identidad, para calcular la

inversa de A podemos seguir un procedimiento análogo al de la práctica de matrices elementales. Para ello tomaremos la matriz (A/I) resultante de pegar la matriz A y la matriz identidad y aplicando transformaciones elementales por filas a dicha matriz, obtendremos a la izquierda, la forma de Hermite por filas H , que será la identidad, y a la derecha Q , una matriz que verifica la siguiente ecuación: $Q.A = H = Id$, por tanto, $Q = A^{-1}$.

Los determinantes nos proporcionan también un nuevo método para calcular la inversa de una matriz A , que como sabemos es

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{\det(A)}$$

donde $Adj(A) = (\alpha_{ij})_{i,j}$ es la **matriz adjunta**, esto es la matriz que en cada posición tiene el correspondiente menor adjunto de A , siendo el **ij-ésimo menor adjunto** de A

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

donde A_{ij} es la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i -ésima y la columna j -ésima.

Mathematica no tiene definida la matriz adjunta de A , por lo que previamente tendremos que definirla y para ello usaremos la orden **Minors[A, n]** que calcula los menores de A de orden n y los expresa mediante una matriz. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo 3.8. Usar la orden Minors[] para calcular los menores de orden 2 de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
In[]:= A={{1,2,-1},{0,-2,1},{2,1,-1}};
      S=Minors[A,2];
      MatrixForm[S]
```

$$\text{Out[]:= } \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que el orden no es el mismo que usamos cuando nosotros calculamos la matriz adjunta. ■

Para calcular la matriz adjunta tenemos que darnos cuenta que Minors nos da como salida los menores de orden 2 de forma que el menor que resulta de quitar la fila 1 y la columna 1 lo coloca en el lugar s_{33} y así sucesivamente, por tanto la matriz adjunta de A se puede definir mediante una reordenación de las componentes de S previamente multiplicadas por $(-1)^{i+j}$. Veámoslo en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.9. Calcular la matriz adjunta de la matriz del ejercicio anterior:

```
In[]:= adj=Table[(-1)^(i+j)*S[[4-i, 4-j]],{i,1,3},{j,1,3}];
MatrixForm[adj]
```

```
Out[]:= 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

```



Una vez definida la matriz adjunta podemos calcular la inversa de una matriz regular aplicando la conocida fórmula, es decir, adjunta transpuesta partido por el determinante:

Ejemplo 3.10. Calcular la matriz inversa de la matriz del ejercicio 3.7:

```
In[]:= inv =Transpose[adj]/Det[A];
MatrixForm[inv]
```

```
Out[]:= 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

```

