Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

Matrices elementales. Forma normal de Hermite.

1. MATRICES ELEMENTALES EN MATHEMATICA.

Vamos a definir las matrices elementales en Mathematica. Recordemos que una **matriz elemental** es la matriz que se obtiene al realizar una y sólo una transformación elemental sobre la matriz identidad. Como sabemos hay tres tipos, cada uno de ellos correspondientes a una de las transformaciones elementales.

Tipo I: Se obtiene intercambiando en la matriz identidad de orden n, las filas i y j (la denotamos por P_{ij}), en Mathematica necesitamos además de indicar el valor de i y de j hemos de indicar el orden n de la identidad a la que se le aplica la transformación elemental, por este motivo tal transformación la denotaremos mediante el1[i, j, n]:

```
el1[i_,j_,n_] :=Module[{B},
        B =IdentityMatrix[n];
        B[[i, i]] = 0;
        B[[j, j]] = 0;
        B[[i, j]] = 1;
        B[[j, i]] = B[[i, j]];
        B]
```

Tipo II: Se obtiene multiplicando la fila i de la matriz identidad de orden n por k, la denotamos por $Q_i(k)$ y en Mathematica la vamos a denotar mediante el2[i, k, n].

```
el2[i_, k_, n_] :=Module[{B},
        B =IdentityMatrix[n];
        B[[i, i]] = k;
        B]
```

Tipo III: Se obtiene sumando a la fila i de la matriz identidad de orden n, la fila j previamente multiplicada por k, la denotamos por $Pt_{ij}(k)$, en Mathematica la vamos a denotar por el3[i, j, k, n]:

```
el3[i_, j_, k_, n_] :=Module[{B},
        B =IdentityMatrix[n];
        B[[i, j]] = k;
        B]
```

Ejemplo 2.1. Obtener las matrices elementales P_{34} de orden 5, $Q_2(-4)$ de orden 3 y $Pt_{31}(5)$ de orden 4.

In[]: = **el1[i_,j_,n_] :=Module[{B},**
B =IdentityMatrix[n];
B[[i, i]] = 0;
B[[j, j]] = 0;
B[[i, j]] = 1;
B[[j, i]] = B[[i, j]];
B]

In[]: = **el1[3, 4, 5]//MatrixForm**

Out[]: =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[]: **=** **el2[i_, k_, n_] :=Module[{B},**
B =IdentityMatrix[n];
B[[i, i]] = k;
B]

In[]: = **el2[2, -4, 3]//MatrixForm**

Out[]: =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[]: = **el3[i_, j_, k_, n_] :=Module[{B},**
B =IdentityMatrix[n];
B[[i, j]] = k;
B]

In[]: = **el3[3, 1, 5, 4]//MatrixForm**

Out[]: =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

En lo sucesivo siempre que queramos trabajar con matrices elementales en el Mathematica hemos de ejecutar previamente la definición de las matrices elementales, pues Mathematica no las tiene predeterminadas.

Por último, en el siguiente ejemplo vamos a comprobar cómo dada una matriz A $\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y dada E (resp. F) matriz elemental de orden m (resp. n), entonces EA (resp. AF) es la matriz que se obtiene de A aplicando a sus filas (resp. columnas) la misma transformación elemental con la que se obtiene E (resp. F) a partir de la identidad:

Ejemplo 2.2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Obtener mediante el producto de una matriz elemental la matriz que se obtiene tras intercambiar la fila 2 por la fila 3 y la matriz que se obtiene multiplicando por 3 la columna 2.

In[]: =

```
A={{1,2,3,4},{2,3,4,5},{3,4,5,6}};
b=el1[2,3,3].A;
MatrixForm[b]
c= A.el2[2,3,4];
MatrixForm[c]
```

Out[]: =

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

■

2. FORMA NORMAL DE HERMITE POR FILAS.

En primer lugar tenemos que ejecutar las definiciones de las matrices elementales. A continuación iremos realizando transformaciones elementales hasta conseguir la forma normal de Hermite, para ello bastará con multiplicar A por las correspondientes matrices elementales. No obstante debemos saber que Mathematica incorpora el siguiente comando:

RowReduce[matriz]

que nos devuelve la forma normal de Hermite por filas de matriz:

Ejemplo 2.3. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la forma de Hermite por filas de la matriz

Primero introducimos la matriz:

In[]: = **A={{2,1,3,-2},{2,-1,5,2},{1,1,1,1}};**

Ahora multiplicamos A por las matrices elementales necesarias para ir obteniendo la matriz escalonada reducida equivalente por filas a A. En primer lugar, intercambiamos la fila 1 y la fila 3 ($F_1 \leftrightarrow F_3$), para obtener el pivote 1:

In[]: = **A1=el1[1,3,3].A;**
MatrixForm[A1]

Out[]: =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Para hacer ceros debajo del pivote realizamos las siguientes operaciones $F_2 \leftrightarrow F_2 -2 F_1$ y $F_3 \leftrightarrow F_3 -2 F_1$:

In[]: = **A2=el3[2,1,-2,3].A1;**
A3=el3[3,1,-2,3].A2;
MatrixForm[A2]

Out[]: =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Continuando con el proceso realizamos las operaciones $F_2 \leftrightarrow (-1/3)F_2$, $F_3 \leftrightarrow F_3 + F_2$, $F_3 \leftrightarrow (-1/4)F_3$, $F_1 \leftrightarrow F_1 - F_2$ y $F_1 \leftrightarrow F_1 - F_3$ con lo que obtenemos A8 que es la forma normal de Hermite por filas de A:

In[]: = **A4=el2[2,-1/3,3].A3;**
A5=el3[3,2,1,3].A4;
A6=el2[3,-1/4,3].A5;
A7=el3[1,2,-1,3].A6;

```
A8=el3[1,3,-1,3].A7;
MatrixForm[A8]
```

Out[]: =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último comprobamos el resultado usando el comando RowReduce[matriz]

In[]: = **RowReduce[A]//MatrixForm**

Out[]: =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

■

3. INVERSA MEDIANTE LA FORMA NORMAL DE HERMITE POR FILAS.

Teniendo en cuenta que para toda matriz regular su forma de Hermite por filas es la matriz identidad, para calcular la inversa de A podemos seguir el siguiente procedimiento. Tomaremos la matriz (A | Id) resultante de pegar la matriz A y la matriz identidad y aplicando transformaciones elementales por filas a dicha matriz, obtendremos a la izquierda, la forma de Hermite por filas H, que será la identidad, y a la derecha Q, una matriz que verifica la siguiente ecuación: Q.A = H = Id, por tanto, Q = A^{-1}. Por ejemplo:

Ejemplo 2.4. Calcular la inversa de la siguiente matriz usando la forma normal de Hermite por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In[]: =

```
A={{1,2,-1},{0,-2,1},{2,1,-1}};
n=Dimensions[A][[1]];
B= Transpose[Join[A,IdentityMatrix[n]]];
```

```
Bt=Transpose[RowReduce[B]];
MatrixForm[Table[Bt[[i]],{i,n+1,2n}]]
```

Out[]=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

■

Vamos ahora a crear con el comando Module una nueva orden para calcular la matriz Q tal que H = Q.A a la que llamamos q[matriz] :

```
q[A_]:=Module[{n,m,B,Bt},
        n=Dimensions[A][[1]];
        m=Dimensions[A][[2]];
        B=Transpose[Join[Transpose[A],IdentityMatrix[n]]];
        Bt=Transpose[RowReduce[B]];
        MatrixForm[Transpose[Table[Bt[[i]],{i,m+1,m+n}]]]
         ]
```

Ejemplo 2.5. Calcular la inversa de la matriz del ejemplo anterior usando el nuevo comando.

In[]: =
```
q[A_]:=Module[{n,m,B,Bt},
n=Dimensions[A][[1]];
m=Dimensions[A][[2]];
B=Transpose[Join[Transpose[A],IdentityMatrix[n]]];
Bt=Transpose[RowReduce[B]];
MatrixForm[Transpose[Table[Bt[[i]],{i,m+1,m+n}]]]
 ]
```

In[]: = **q[A]**

Out[]=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

■

Ejemplo 2.6. Calcular la matriz regular Q tal que H = Q.A siendo H la forma normal de Hermite de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

In[]: = **A={{1,3,2},{2,3,4}};**
q[A]

Out[]=

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

In[]: = **%.A==RowReduce[A]**

Out[]= True

■