Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

Espacios vectoriales: Bases y coordenadas

En esta práctica vamos a mostrar la utilidad de las herramientas de manipulación de vectores y matrices en algunos aspectos de los espacios vectoriales.

Recordemos que llamamos **vector** a un elemento de un espacio vectorial. En el caso de que el espacio vectorial sea $\mathbb{K}^n$ (con $\mathbb{K}$ un cuerpo), los vectores serán n-uplas y los introduciremos en Mathematica como una lista formada por n elementos de $\mathbb{K}$ (ver práctica 1). Para cualquier otro espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, de dimensión n, utilizaremos su identificación con $\mathbb{K}^n$ a través de las coordenadas respecto de una determinada base. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

de $M_2(\mathbb{R})$ la identificamos con la cuaterna (1, 0, 2, -1) pues estas son las coordenadas respecto de la base canónica:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $M_2(\mathbb{R})$, o el polinomio $p(x) = 3x^2 + x + 2$ de $P_2(\mathbb{R})$ lo identificamos con (2, 1, 3) pues estas son las coordenadas respecto de la base canónica $\{1, x, x^2\}$.

1. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

En un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, dado un conjunto finito de vectores $v_1,v_2,...,v_n \in V$, llamaremos **combinación lineal** de estos vectores a cualquier vector de la forma $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...+\alpha_n v_n$, con α_i escalares en $\mathbb{K}$ para i=1, 2,..., n. Por otra parte, un conjunto finito de vectores se dice **linealmente independiente** si el vector cero se escribe de forma única como combinación lineal de dichos vectores y, por tanto, con escalares cero. En otro caso, estos vectores serán **linealmente dependientes.** Para espacios de dimensión finita, esto puede traducirse en el estudio de los sistemas homogéneos que tienen como matriz de coeficientes a aquella en la que sus columnas son las coordenadas, respecto de una determinada base (elegiremos siempre que sea posible la canónica), de los vectores que estamos estudiando. El teorema de Rouché-Frobenius nos permite deducir que un conjunto de r vectores es linealmente independiente si y sólo si el rango de la matriz cuyas filas son las coordenadas de los vectores respecto de una base, es igual al número de vectores del conjunto.

Ejemplo 6.1. Estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores de $\mathbb{R}^3$, v = (1, 0, 0) y w = (–1, 1, 0).

In[]: = **v ={1,0,0};**
w={-1,1,0};
A= {v, w};
MatrixRank[A]

Out[]: =

2

Así, el rango es 2 igual que el número de vectores, y por tanto, el conjunto formado por estos dos vectores es linealmente independiente.

■

Ejemplo 6.2. Estudiar la dependencia o independencia lineal del siguiente conjunto de matrices del espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$.

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

In[]: = **A=Transpose[{{1,1,1,1},{1,1,2,0},{1,1,0,2},{-1,0,1,0}}];**
MatrixRank[A]

Out[]: =
3

Así, el rango es 3 que no coincide con el número de matrices del conjunto, por tanto, este conjunto es linealmente dependiente, sólo 3 de estos vectores son independientes.

■

Ejemplo 6.3. Comprobar si alguno de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^6$ es linealmente independiente:

S_1 = {(1, 1, 0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, -2, 0, 0), (1, -1, -1, 0, 1, -1)}

S_2 = {(0, 0, 1, 1, 1, -1), (0, 0, 1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 2, 2, 2, 0)}

In[]: = **S1={{1,1,0,0,1,0},{-1,1,0,1,1,1},{1,0,0,-2,0,0},{1,-1,-1,0,1,-1}};**
S2={{0,0,1,1,1,0},{0,0,1,1,1,0},{0,0,1,0,0,1},{0,0,2,2,2,0}};

In[]: = **MatrixRank[S1]==4**

Out[]: =
True

In[]: = **MatrixRank[S2]==4**

Out[]: =

$False$

Por tanto, los vectores de S_1 son linealmente independientes y los de S_2 no lo son.

■

2. SISTEMAS DE GENERADORES.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión n. Dado un subconjunto de vectores S de V, consideramos A la matriz cuyas filas sean las coordenadas de los vectores que hay en S, entonces este subconjunto de vectores será **sistema de generadores** de V si el rango de A coincide con la dimensión del espacio vectorial. Recordar que la **dimensión** de un espacio vectorial es el número de vectores de cada una de sus bases.

Ejemplo 6.4. Comprobar si alguno de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es sistema de generadores de este espacio:

$$S_1 = \{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 2, 10), (0, 1, -1)\}$$

$$S_2 = \{(1, 1, -1), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 2, 0)\}$$

In[]: = **S1={{1,1,0},{-1,1,0},{0,2,10},{0,1,-1}};**
S2={{1,1,-1},{1,1,0},{0,0,1},{2,2,0}};

Sabiendo que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, estos conjuntos serán sistema de generadores de este espacio vectorial si:

In[]: = **MatrixRank[S1]==3**

Out[]: =

$True$

In[]: = **MatrixRank[S2]==3**

Out[]: =

$False$

Por tanto, S_1 es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ y S_2 no lo es.

■

3. BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL.

Sabemos que una **base** de un espacio vectorial V de dimensión n es un conjunto de vectores linealmente independiente y que además es un sistema de generadores de dicho espacio. Las bases las introducimos en Mathematica como matrices, es decir, como lista de listas siendo cada una de sus componentes uno de los vectores de la base. Dado un subconjunto de vectores S de V, si consideramos A la matriz cuyas filas son las coordenadas de los vectores que hay en S, entonces S será base, si ocurren las dos cosas que hemos estudiado previamente para que S sea linealmente independiente y sistema de generadores, esto es, el rango coincide con el número de vectores y con la dimensión del espacio vectorial. En tal caso, la matriz A es cuadrada y regular.

Ejemplo 6.5. Comprobar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son bases:

$$B_1 = \{(1,0,0),(-1,1,0),(0,1,-1)\}$$
$$B_2 = \{(1,0,-1),(2,1,0),(-3,1,-1)\}$$

Introducimos en Mathematica los dos conjuntos de vectores

In[]:= **B1={{1,0,0},{-1,1,0},{0,1,-1}};**
B2 ={{1,0,-1},{2,1,0},{-3,-1,1}};

Comprobamos si B_1 es base, viendo primero que la matriz que forman los vectores es cuadrada y después que regular:

In[]:= **Dimensions[B1][[1]]==Dimensions[B1][[2]] (*Cuadrada*)**

Out[]= True

Det[B1] ≠ 0 (*Regular*)

Out[]= True

Por tanto, B_1 es base. Veamos ahora que pasa con B_2

In[]:= **Dimensions[B2][[1]]==Dimensions[B2][[2]] (*Cuadrada*)**

Out[]= True

Det[B2] ≠ 0 (*Regular*)

Out[]= False

Por tanto, B_2 no es base.

■

Ejemplo 6.6. Ampliar el subconjunto S_1 del espacio vectorial $\mathbb{R}^6$ que en el ejemplo 6.3. hemos comprobado que es linealmente independiente, hasta conseguir una base.

$$S_1 = \{(1, 1, 0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, -2, 0, 0), (1, -1, -1, 0, 1, -1)\}$$

Teniendo en cuenta que la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^6$ es 6, ampliamos el conjunto anterior con dos vectores más, que sean linealmente independientes, hasta tener 6 vectores linealmente independientes y conseguir una base de $\mathbb{R}^6$.

Añadimos un vector (el quinto) y comprobamos que son linealmente independiente:

In[]:= **S1={{1,1,0,0,1,0},{-1,1,0,1,1,1},{1,0,0,-2,0,0},{1,-1,-1,0,1,-1}};**
S1 = S1 ∪ {{1,0,0,0,0,0}}
MatrixRank[S1]==5

Out[]:= {{1,1,0,0,1,0},{-1,1,0,1,1,1},{1,0,0,-2,0,0},{1,0,0,0,0,0},
{1,-1,-1,0,1,-1}};

True

Añadimos uno más, y volvemos a comprobar que son linealmente independientes:

In[]:= **S1 = S1 ∪ {{0,1,0,0,0,0}}**
MatrixRank[S1]==6

Out[]:= {{1,1,0,0,1,0},{0,1,0,0,0,0},{-1,1,0,1,1,1},{1,0,0,-2,0,0},
{1,0,0,0,0,0}, {1,-1,-1,0,1,-1}};

True

Ya tenemos 6 vectores linealmente independientes y por tanto son base de $\mathbb{R}^6$. En efecto, su determinante es distinto de cero:

In[]:= **Det[S1]≠ 0**

Out[]= True

■

Ejemplo 6.7. Dado el sistema de generadores S_1 del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ del ejemplo 6.4., calcular una base a partir de:

$$S_1 = \{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 2, 10), (0, 1, -1)\}$$

Introducimos en Mathematica el subconjunto:

In[]:= **S1={{1,1,0},{-1,1,0},{0,2,10},{0,1,-1}};**

Si nos dan un sistema de generadores del espacio vectorial, podemos calcular una base quitando vectores que sean linealmente dependientes de los demás hasta quedarnos con tantos vectores como la dimensión del espacio vectorial. Sabemos que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3 y S_1 tiene 4 vectores, por tanto, sobra un vector, tenemos que quitar uno que sea linealmente dependiente con los demás, podemos hacerlo por tanteo, quitando uno cualquiera y comprobando si los restantes siguen siendo sistema de generadores. Por ejemplo probamos a quitar el primer vector:

In[]:= B=**{{-1,1,0},{0,2,10},{0,1,-1}};**
MatrixRank[B]==3

Out[]:= True

Nos sale que sí es sistema de generadores, por tanto, seguro que es base, en efecto:

In[]:= **Det[B]≠0**

Out[]:= True

Tambien podemos buscar una base desde un sistema de generadores cogiendo las filas no nulas de la forma normal de Hermite por filas de A. Pero, siempre nos saldrá las base canónica:

In[]:= **Base[Generadores_] := Table[RowReduce[Generadores][[i]],**
{i, MatrixRank[Generadores]}];

Base[S1]

Out[]= {{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}

■

4. COORDENADAS RESPECTO DE UNA BASE.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión n, y sea B = {e_1, e_2, ... , e_n} una base de V. Sabemos que cualquier vector v ∈ V, se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores B:

$$v = \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \ldots + \lambda_n \cdot e_n$$

Y que los coeficientes λ_i, únicos, de esa combinación lineal, son las coordenadas de x respecto de la B, y escribimos:

$$v = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_B$$

Con Mathematica las calculamos resolviendo el sistema de ecuaciones lineal compatible determinado dado por A·X = v, donde A es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base B.

Podemos utilizar la siguiente orden:

Coordenadas[X_, B_] := LinearSolve[Transpose[B], X];

Ejemplo 6.8. Calcular las coordenadas del vector v = (4, 1, -2) de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base B_1 = {(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, 1, -1)}

Las coordenadas de un vector respecto de una base se pueden calcular mediante la resolución de un sistema de ecuaciones. Consideremos el vector v de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (4, 1, -2) respecto de la base canónica y veamos cuáles son sus coordenadas respecto de la base B_1. Las coordenadas buscadas serán los números (x, y, z) tales que:

$$(4, 1, -2) = x\,(1, 0, 0) + y\,(-1, 1, 0) + z\,(0, 1, -1)$$

es decir, la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

con matriz de coeficientes aquella cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base y cuyo vector de términos independientes es el vector v.

Introducimos en Mathematica, el vector y la base:

In[]:= **v={4,1,-2}**
B1={{1,0,0},{-1,1,0},{0,1,-1}};

In[]:= **Coordenadas[X_, B_] := LinearSolve[Transpose[B], X];**
Coordenadas[v, B1]

Out[]:= {3, -1, 2}

■

5. CAMBIO DE BASE.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión n, y sean B = {e_1, e_2, ... , e_n} y B' = {e'_1, e'_2, ... , e'_n} dos bases distintas de V. Entonces un vector cualquiera v ∈ V, tendrá unas coordenadas respecto B,

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)_B$$

y otras respecto de B'

$$v = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_n)_{B'}$$

Y sabemos que, existe un matriz regular P, que llamamos **matriz de cambio** de base de B a B' tal que

$$P \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

para calcular la matriz de cambio de base, cogíamos las coordenadas de cada vector de B respecto de B', y éstas, puestas como columnas en una matriz definían P. Con Mathematica podemos hacer lo mismo con la función:

In[]:= **CambioBase[B1_,B2_]:= Transpose[Table[**

Coordenadas[B1[[i]],B2], {i,Length[B1]}]];

que calcula la matriz de cambio de base.

Ejemplo 6.9. Sabiendo que B_1 ={(1,0,0), (-1,1,0),(0,1,-1)} y B_2 = {(1,0,-1), (2,1,0), (-3,1,-1)} son bases de $\mathbb{R}^3$, vamos a calcular su matriz del cambio de base:

En primer lugar introducimos las bases en Mathematica:

In[]:= **B1={{1,0,0},{-1,1,0},{0,1,-1}};**
B2={{1,0,-1},{2,1,0},{-3,1,-1}};

In[]:= **Coordenadas[X_, B_] := LinearSolve[Transpose[B], X];**

In[]:= **CambioBase[B1_,B2_]:= Transpose[Table[**
Coordenadas[B1[[i]],B2], {i,Length[B1]}]];

In[]:= **P = CambioBase[B1,B2];**
P//MatrixForm

Out[]=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora comprobamos que, en efecto, las coordenadas de un vector cualquiera respecto de ambas bases, están relacionadas mediante la matriz de cambio de base como se dice antes, lo probamos con el vector v = (4, 1, -2):

In[]:= **v = {4, 1, -2};**
Coordenadas[v, B1]

Out[]= {3,-1,2}

In[]:= **Coordenadas[v, B2]**

Out[]= {2, 1, 0}

Una vez construida la matriz del cambio de base es inmediato obtener las coordenadas del vector dado, basta con multiplicar dicha matriz por el vector:

In[]:= **P.Coordenadas[v, B1]**

Out[]= {2,1,0}

■