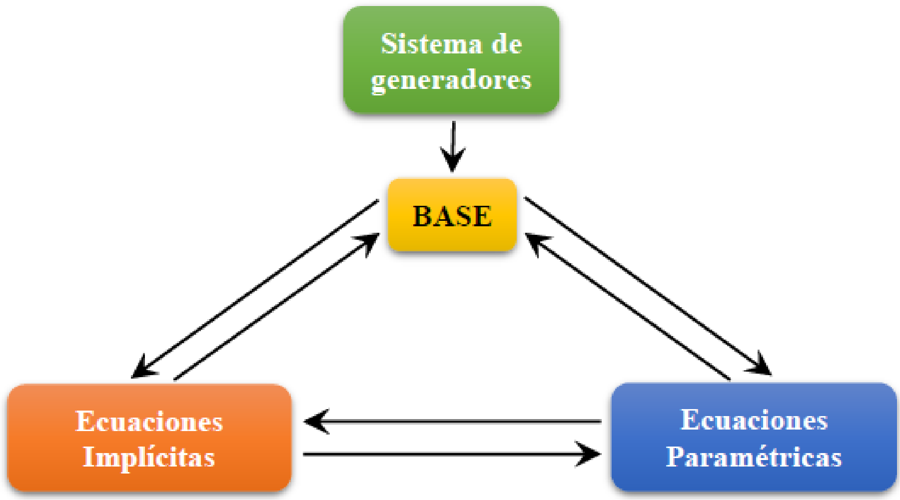
Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

Subespacios vectoriales. Ecuaciones paramétrica e implícitas.

Los subespacios vectoriales pueden dárnoslos a partir de un sistema de generadores, una base, las ecuaciones paramétricas o las ecuaciones implícitas. En esta práctica aprenderemos a movernos entre las distintas formas de representar un subespacio vectorial con Mathematica.



1. SUBESPACIOS VECTORIALES.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea U subconjunto de V no vacío. Diremos que U es un **subespacio vectorial** de V y lo denotamos por $U \leq V$ si U es cerrado para la suma y para el producto por escalares, es decir:

1. $u + v \in U, \forall u, v \in U$
2. $\alpha u \in U, \forall u \in U$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Observar que si U es un subespacio vectorial de V entonces es un espacio vectorial.

<u>Caracterización</u>

Dado V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y $\emptyset \neq U \subset V$ se tiene que U es subespacio vectorial de V si, y solo si, $\alpha u + \beta v \in U, \forall u, v \in U$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Ejemplo 6.1. Estudiar, usando la caracterización, que U = {(x, 2x) / x $\in$ $\mathbb{R}$ } es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, mientras que W = {(x, x – 1) / x $\in$ $\mathbb{R}$} no lo es.

Primero introducimos dos vectores arbitrarios de U, por ejemplo (a, 2a) y (b, 2b):

In[1]: = **v ={a,2a};**
w={b,2b};
c = α*v+β*w//Simplify
Out[1]: = `{a α+b β,2 (a α+b β)}`

Teniendo en cuenta que en Mathematica c[[i]] representa la i-ésima componente de c, comprobamos si el elemento anterior pertenece a U, viendo si su segunda componente es igual el doble de la primera:

In[2]: = **c[[2]]==2*c[[1]]** (esto depende de la definición del subespacio U)

Out[2]: = `True`

Por tanto, U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Análogamente, si tomamos dos vectores arbitrarios de W, (a, a – 1) y (b, b – 1), se tiene:

In[3]: = **v ={a,a-1};**
w={b,b-1};
c = α*v+β*w//Simplify

Out[3]: = $\{a\alpha + b\beta, (-1+a)\alpha + (-1+b)\beta\}$

In[4]: = **c[[2]]===c[[1]] – 1**

Out[4]: = `False`

Por tanto, W no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

■

Ejemplo 6.2. Estudiar, usando la caracterización, que U = {(x, y, z) / x + y + z = 0} es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Primero introducimos dos vectores arbitrarios de U, por ejemplo (x1, y1, z1) y (x2, y2, z2):

In[5]: = **v ={x1,y1,z1};**
w={x2,y2,z2};
c = α*v+β*w//Simplify
Out[5]: = `{x1α + x2β, y1α + y2β, z1α + z2β}`

Teniendo en cuenta que en Mathematica c[[i]] representa la i-ésima componente de c, comprobamos si el elemento anterior pertenece a U, viendo si la suma de sus tres coordenadas es cero:

In[6]: = **ReplaceAll[{(x1+y1+z1)->0, (x2+y2+z2)->0}][FullSimplify[c[[1]]+ c[[2]]+c[[3]]]]** (esto depende de la definición del subespacio U)

Out[6]: = 0

Por tanto, U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2. BASE Y DIMENSIÓN DE UN SUBESPACIO.

Como sabemos, todo vector de un subespacio se puede obtener como combinación lineal de los vectores de una base del mismo. Por tanto, conocida una base, es fácil determinar qué vectores pertenecen al subespacio. En este apartado usaremos algunos resultados vistos en clase de teoría para obtener con ayuda del Mathematica una base de un subespacio:

Proposición
Sea $\{u_1,u_2,...,u_r\} \subset V$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces la dimensión del subespacio $<u_1,u_2,...,u_r>$ generado por estos vectores coinciden con el rango de dicho conjunto de vectores.

Proposición
Sea V un espacio vectorial y B una base de V. Un conjunto de r vectores $\{u_1,u_2,...,u_r\}$ es linealmente independiente si, y solo si, la matriz cuyas columnas (respectivamente filas) son sus coordenadas respecto de B tiene rango r.

Corolario
Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea B una base de V. Sea $U=< u_1, u_2,..., u_k>$ un subespacio de V y consideremos la matriz A de orden $k \times n$ cuyas filas son las coordenadas respecto B de los vectores $u_1, u_2,..., u_k$. Entonces dim(U) = rg(A) y las filas no nulas de la forma normal de Hermite por filas de A son las coordenadas de los vectores de una base de U.

Por tanto, dado un sistema de generadores podemos calcular la base y la dimensión del subespacio como vemos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 6.3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el subespacio generado por S = {(1, 1, 1) , (1, 0, 1), (0, -1, 0)}, calculamos su dimensión:

In[7]: = **S={{1,1,1},{1,0,1},{0,-1,0}};**
dimensión=MatrixRank[S] (*Dimensión del subespacio*)

Out[7]: = 2

Para calcular la base usaremos la forma normal de Hermite por filas de la matriz que tiene por filas las coordenadas de los vectores del sistema de generadores, usaremos la función de Mathematica **RowReduce[]**, aunque de nuevo podríamos usar cualquiera de los métodos que hemos visto.

La base serán las filas no nulas de la forma normal de Hermite por filas, que sabemos que coinciden con el rango:

Base[Generadores_]:=Table[RowReduce[Generadores][[i]],{i,MatrixRank[Generadores]}]; (*Filas no nulas de la F. N. Hermite por filas*)

Ejemplo 6.4. En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ consideramos el conjunto de matrices:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinar la base del subespacio L(S).

Primero introducimos los elementos de S usando para ello sus coordenadas respecto de la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

In[8]: = **S={{1,1,1,1},{1,1,2,0},{1,1,0,2},{-1,0,1,0}};**

Ejecutamos el nuevo comando para calcular la base:

In[9]: = **Base[Generadores_]:=Table[RowReduce[Generadores][[i]],{i, MatrixRank[Generadores]}];**
base = Base[S]

Out[9]: = `{{1,0,0,-1},{0,1,0,3},{0,0,1,-1}}`

Así, como el rango de esta matriz es 3, la dimensión del subespacio generado por S es 3 y una base de L(S) es

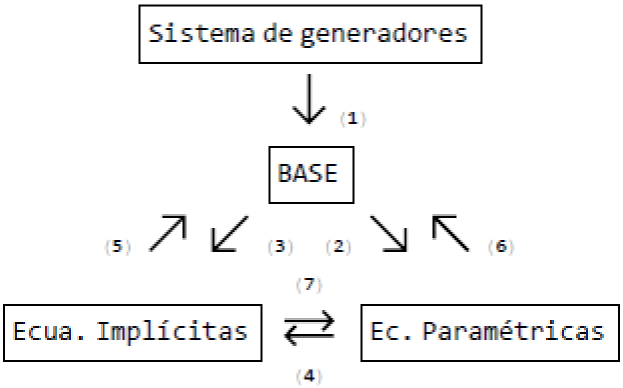
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

■

3. ECUACIONES PARAMÉTRICAS E IMPLICITAS DE UN SUBESPACIO.

En el apartado anterior hemos visto que una forma de determinar un subespacio es a partir de su base. En este apartado consideramos otras dos formas de expresar un subespacio y la forma de pasar de una a otra con ayuda del Mathematica.

Los subespacios vectoriales pueden dárnoslos a partir de un sistema de generadores, una base, las ecuaciones paramétricas o las ecuaciones implícitas. En este epígrafe aprenderemos a movernos entre las distintas formas de representar un subespacio vectorial:



**Al lado de la flecha se indica (i) para señalar posteriormente los comandos que nos permiten ir de una a otra forma de describir el subespacio vectorial. En el apartado anterior hemos aprendido como pasar de sistema generador a base (1).

Dado un espacio vectorial V de dimensión n, y un subespacio W de dimensión m, calcularemos las **ecuaciones paramétricas** desde una base cualquiera $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ del subespacio vectorial cogeremos una combinación lineal cualquiera de los vectores de la base:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda_m \cdot b_m$$

ahora coordenada a coordenada expresamos cada xi en función de los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, quedándonos las ecuaciones paramétricas.

$$x_1 = a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1r}\lambda_n$$

$$x_2 = a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2r}\lambda_n$$

....

$$x_n = a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \ldots + a_{nr}\lambda_n$$

Estas igualdades se pueden interpretar como el conjunto de soluciones de un cierto sistema de ecuaciones con n incógnitas. Es fácil notar que puesto que $0 \in U$, la solución trivial es una de las que aparece en este conjunto, por lo que el sistema es necesariamente homogéneo. A cualquier sistema homogéneo cuyo conjunto de soluciones sea el anterior lo llamaremos **ecuaciones cartesianas o implícitas de U** respecto de la base B. Estas ecuaciones nos dan las condiciones que tiene que cumplir las coordenadas de un vector para que pertenezca al subespacio en cuestión. Existen varios métodos para calcular unas ecuaciones cartesianas de un subespacio, entre ellos el de eliminación de parámetros. La siguiente propiedad nos dice el menor número de ecuaciones implícitas que define un subespacio.

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, para cada subespacio U el menor número de ecuaciones implícitas que lo define es k = dim(V) – dim(U).

Veamos cómo podemos calcular con Mathematica tanto las ecuaciones paramétricas como implícitas de un subespacio conocida su base. Si conocemos su base, conocemos la dimensión de dicho subespacio (el número de vectores de su base) lo que nos permitirá saber cuántos parámetros son necesarios para calcular las ecuaciones paramétricas que lo definen. Tras introducir el vector de coordenadas que dependerá del espacio vectorial en el que estemos trabajando, las ecuaciones paramétricas se obtendrán definiendo la ecuación que se obtiene igualando estas coordenadas a la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base del subespacio, multiplicada por la lista de los parámetros. Por último, la función **LogicalExpand** igualará término a término las listas implicadas, dando lugar a las ecuaciones paramétricas en la forma habitual. Por último, la ecuaciones implícitas se pueden obtener a partir de las anteriores eliminando los parámetros y para ello Mathematica tiene la orden **Eliminate[ecuaciones, parametros]**. Veámoslo en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.5. Obtener las ecuaciones paramétricas e implicitas del subespacio L(S) del ejemplo anterior.

Introducimos la base del subespacio L(S) que calculamos en el ejemplo 5.2:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

Para ello introducimos sus coordenadas respecto de la base canónica. Introducimos en las variables **parametros** y **coordenadas** una lista con tantos parámetros como vectores tengamos en la base y las coordenadas de un vector genérico del espacio vectorial en el que estamos trabajando, en este caso $M_2(\mathbb{R})$:

In[10]:= **B={{1,0,0,-1},{0,1,0,3},{0,0,1,-1}};**
parametros={a,b,c}; (hay que introducir tantos como vectores tenga B)
coordenadas={x,y,z,t};(introducimos tantas coordenadas como dimensión V)
parametricas=LogicalExpand[coordenadas == Transpose[B].parametros]

Out[10]= `t==-a+3 b-c && x==a && y==b && z==c`

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de L(S) son:

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \\ t = -a + 3b - c \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que hemos usado la variable **parametricas** para definir las ecuaciones paramétricas basta con:

In[11]:= **Eliminate[parametricas,parametros]**

Out[11]= `-x+3 y-z==t`

Por tanto, la ecuación implícita de L(S) es:

$$-x + 3y - z - t = 0.$$

■

Presento ahora unos programas que nos calculan directamente las ecuaciones paramétricas de un subespacio a partir de la base (2). Para evitar problemas con el intérprete de Mathematica renombramos los parámetros así: λ_i como `λ[i]`

```
Paramétricas[Base_]:= Module[{Parte1, parametricas},
      Clear[λ];
      Parte1=Sum[λ[i]*Base[[i]],{i,Length[Base]}];
      Parametricas={};
     Do[AppendTo[parametricas, Subscript[x,i]==Parte1[[i]]];
  ,{i, Length[Base[[1]]]}];
    parametricas
  ];
```
(2)

Y para obtener las ecuaciones implícitas desde una base (3) combinamos el programa anterior con el siguiente:

```
Implícitas[Base_]:= Eliminate[Paramétricas[Base],
              Table[λ[i],{i, Length[Base]}]];
```
(3)

Ejemplo 6.6. Obtener en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el subespacio generado por S = {(1, 1, 1) , (1, 0, 1), (0, -1, 0)}, sus ecuaciones paramétricas e implícitas.

Primero insertamos en el Mathematica las dos órdenes anteriores y la orden Base[]:

In[12]:= **Base[Generadores_]:=Table[RowReduce[Generadores][[i]],{i, MatrixRank[Generadores]}];**

```
Paramétricas[Base_]:= Module[{Parte1, parametricas},
     Clear[λ];
     Parte1=Sum[λ[i]*Base[[i]],{i,Length[Base]}];
     Parametricas={};
    Do[AppendTo[parametricas, Subscript[x,i]==Parte1[[i]]];
,{i, Length[Base[[1]]]}];
   parametricas
];

Implícitas[Base_]:= Eliminate[Paramétricas[Base],
          Table[λ[i],{i, Length[Base]}]];
```

Ahora introducimos el sistema generador del subespacio:

In[13]:= **generadores={{1,1,1},{1,0,1},{0,-1,0}};**
paramétricas =Paramétricas[Base[generadores]]

Out[13]= $\{x_1 == \lambda[1], x_2 == \lambda[2], x_3 == \lambda[1]\}$

Y ahora para obtener las implicitas:

In[14]:= **generadores={{1,1,1},{1,0,1},{0,-1,0}};**
implícitas =Implícitas[Base[generadores]]

Out[14]= $x_3 == x_1$

■

Si queremos obtener las ecuaciones implícitas de las paramétricas (4), las calcularemos directamente eliminando los parámetros con la función de Mathematica, **Eliminate[]:**

Eliminate[ecuaciones paramétricas, lista de parámetros]

Ejemplo 6.7. Obtener las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x_1 = \lambda_1$$
$$x_2 = \lambda_2$$
$$x_3 = \lambda_1$$

In[15]:= **paramétricas = {x₁ == λ[1], x₂== λ [2], x₃== λ [1]};**
Eliminate[paramétricas, {λ [1], λ [2]}]

Out[15]= $x_3 == x_1$

■

Definimos ahora una nueva orden para calcular una base del subespacio vectorial desde las ecuaciones implícitas (5). De nuevo, teniendo en cuenta que las ecuaciones implícitas son un sistema de ecuaciones lineales cuya solución son los vectores del subespacio vectorial, calcularemos la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales y usaremos la función de Mathematica **NullSpace[]** aplicándola a la matriz de coeficientes, que nos devolverá directamente la base del subespacio.

```
BaseImplícitas[SISTimplícitas_, dimensión_] :=NullSpace[Join[Normal[
CoefficientArrays[SISTimplícitas,Table[Subscript[x, i], {i, dimensión}]]][[2]],
        Table[Table[0, {j, dimensión}], {i, dimensión - Length[SISTimplícitas]}]]];
```

Ejemplo 6.8. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ consideramos el subespacio con ecuaciones implícitas:

$$x_1 - x_2 = 0,$$
$$3x_1 + 5x_3 = 0$$

su base sería:
Primero hemos de ejecutar la nueva orden que nos calcula la base a partir de las ecuaciones implícitas:

```
In[16]:=  BaseImplícitas[SISTimplícitas_, dimensión_] :=NullSpace[
              Join[Normal[CoefficientArrays[SISTimplícitas,Table[Subscript[x, i],
              {i, dimensión}]]][[2]], Table[Table[0, {j, dimensión}],
              {i, dimensión - Length[SISTimplícitas]}]]];

In[17]:=  BaseImplícitas[{x1 – x2 == 0, 3 x1 + 5 x3 == 0}, 3]

Out[17]:= {{-5,-5,3}}
```

■

Para calcular una <u>base a partir de las ecuaciones paramétricas</u> (6), directamente podríamos calcularla dando valores a los parámetros, asignamos a uno de los parámetros el valor uno y al resto asignamos el cero, y también podemos automatizarlo usando **IdentityMatrix[]**.

Ejemplo 6.9. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ consideramos el subespacio con ecuaciones paramétricas:

$$x_1 = \lambda_1$$
$$x_2 = \lambda_2$$
$$x_3 = \lambda_1$$

calculamos su base:

```
In[18]:=  paramétricas = {x1 == λ[1], x2 == λ [2], x3 == λ [1]};
          dimensión = 2; (*Dimensión del subespacio, número de parámetros*)
          base = {};
          Do[Do[
              λ [i] = IdentityMatrix[dimensión][[j]][[i]], {i, dimensión}];
              AppendTo[base, Table[paramétricas[[i]][[2]]
             ,{i, Length[paramétricas]}]], {j, dimensión}];
          base
```

Out[18]:= `{{0,1,0},{1,0,1}}`

■

Si lo que queremos es obtener a partir de las ecuaciones implícitas, las paramétricas (7) del subespacio lo haremos resolviendo el sistema homogéneo dado por dichas ecuaciones implícitas. Si dicho sistema es compatible determinado, entonces el subespacio es el 0, y si el sistema es compatible indeterminado, su solución general (usando parámetros) son las ecuaciones paramétricas.

Para calcular la solución del sistema de ecuaciones lineales con Mathematica, recordemos que uno de los métodos vistos era usando la orden **Solve.** Por último, si lo que queremos es obtener una base lo podemos hacer mediante la orden **NullSpace**. Lo vemos con otro ejemplo:

Ejemplo 6.10. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ consideramos el subespacio vectorial U cuyas ecuaciones implícitas son:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y+t=0 \end{cases}$$

Calcular las ecuaciones paramétricas y una base de U.

In[19]:= **ecuaciones={x+y-z==0, y+t==0};**
Solve[ecuaciones,{x,y,z,t}]

Out[19]= `{{x==t+z,y==-t}}`

Tomando como parámetros las variables que nos encontramos a la derecha de las igualdades, es decir, t = λ y z = μ las ecuaciones paramétricas de este subespacios serán:

$$\begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=-\lambda \\ z=\mu \\ t=\lambda \end{cases}$$

Para poder usar la orden NullSpace necesitamos obtener la matriz de coeficientes del sistema que llamamos A:

In[20]:= **A={{1,1,-1,0},{0,1,0,1}};**
NullSpace[A]

Out[20]= `{{1,-1,0,1},{1,0,1,0}}`

Por tanto, la base de U es la formada por los vectores {(1,-1,0,1), (1,0,1,0)}.

■

Observemos que en realidad lo que hemos razonado nos lleva a calcular la base del subespacio y después coger una combinación lineal de ésta, esto es, pasar de las ímplicitas a la base (5) y de la base a las paramétricas (2).

Ejemplo 6.11. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ consideramos el subespacio vectorial U cuyas ecuaciones implícitas son:

$$x_1 - x_2 = 0,$$
$$3x_1 + 5x_3 = 0$$

usamos las funciones **Paramétricas[]** y **BaseImplícitas[]** anteriores:

In[21]:= **Paramétricas[BaseImplícitas[{x1 – x2 == 0, 3 x1 + 5 x3 == 0}, 3]]**

Out[21]= `{x1 = -5 λ[1], x2 = -5 λ [1], x3 = 3 λ [1]}`

■

Para terminar realizamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ consideramos el subconjunto

$$U = \{(x, y, z) / x + 2y - z = 0\}.$$

Se pide:

a) Comprobar que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
b) Calcular base, dimensión y ecuaciones paramétricas de U.

En primer lugar comprobamos que es un subespacio vectorial. Para ello consideramos dos vectores genéricos de U, es decir, (x1, y1, z1) y (x2, y2, z2) verificando la ecuación implícita que define los elementos de U, es decir, x1+2*y1-z1=0 y x2+2*y2-z2=0:

In[22]: = **v ={x1,y1,z1};**
w={x2,y2,z2};
c = α*v+β*w//Simplify

Out[22]: = `{x1α+x2β, y1α+y2β, z1α+z2β}`

Como en Mathematica c[[i]] representa la i-ésima componente de c, comprobamos si el elemento anterior pertenece a U, viendo si verifica la ecuación que define U sabiendo que los vectores arbitrarios de partida la verificaban, esto lo hacemos de la siguiente forma:

In[23]: = **FullSimplify[c[[1]]+ 2*c[[2]]-c[[3]]]==0/.{(x1+2*y1-z1)->0,**
(x2+2*y2-z2)->0} (esto depende de la definición del subespacio U)

Out[23]: = `True`

Por tanto, U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Ahora calculemos las ecuaciones paramétricas resolviendo la ecuación implícita:

In[24]:= **ecuaciones={x+2y-z==0};**
Solve[ecuaciones,{x,y,z}]

Out[24]= $\{\{z \to x + 2y\}\}$

Tomando como parámetros las variables que nos encontramos a la derecha de las igualdades, es decir, x= λ e y = μ las ecuaciones paramétricas de este subespacios serán:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases}$$

Para poder usar la orden NullSpace necesitamos obtener la matriz de coeficientes del sistema que llamamos A:

In[25]:= **A={{1,2,-1}};**
NullSpace[A]

Out[25]= {{1,0,1},{-2,1,0}}

Por tanto, la base de U es la formada por los vectores {(1,0,1), (-2,1,0)} y su dimensión es 2 ya que la base de U tiene dos vectores.

■