Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

Diagonalización. Valores y vectores propios. Aplicaciones.

En esta práctica estudiamos el proceso de diagonalización de un endomorfismo. Dado un endomorfismo f: V $\longrightarrow$ V con matriz asociada A, veremos cómo calcular valores y vectores propios de A mediante comandos del Mathematica y a partir del polinomio característico. Para finalizar la diagonalización calculando la matriz regular P de forma que $D = P^{-1}AP$.

1.- VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UN ENDOMORFISMO. POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Sea V un espacios vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $f:V \longrightarrow V$ una endomorfismo de V. Se dice que el escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio** (o autovalor) de f si existe un vector no nulo $u \in V$ de forma que $f(u) = \lambda u$.

Para un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, llamaremos **vector propio** (o autovector) asociado a λ a cada vector u de V tal que $f(u)= \lambda u$. Denotamos por V_λ al conjunto de todos los autovectores asociados a λ, esto es:

$$V_\lambda=\{u \in V/ f(u)= \lambda u\}$$

<u>Proposición</u>

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, f un endomorfismo de V y sea A la matriz asociada a f respecto de una base de V. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, se verifica:

1. $V_\lambda = Ker(f - \lambda I)$.
2. V_λ es un subespacio vectorial de V.
3. $dim(V_\lambda) = n - rg(A - \lambda I)$.
4. λ es autovalor de f $\Leftrightarrow det(A - \lambda I) =0$.

Al subespacio V_λ recibe el nombre de **subespacio propio** de λ.

Según hemos visto, para un endomorfismo f de matriz asociada A, un escalar λ es un valor propio de f si, y solo si, $det(A - \lambda I) =0$; ahora bien, considerando λ como indeterminada, este determinante

$$det(A - \lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

es un polinomio en λ, p(λ), de grado n que recibe el nombre de **polinomio característico** de f. Los valores propios serán precisamente las raíces del polinomio característico. En particular se tiene que el número máximo de valores propios de f es exactamente n. Además, el polinomio característico de f no depende de la matriz asociada a f que se considere.

Ejemplo 10.1 Sea f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$f(x, y, z) = (3x+y+z, x+3y+z, x+y+3z)$$

Calcular el polinomio característico, los valores propios y los subespacios propios.

Definimos en Mathematica el endomorfismo f, calculamos la matriz asociada a la base canónica:

In[1]:= **f[{x_,y_,z_}]:={3x+y+z, x+3y+z, x+y+3z}**
B= IdentityMatrix[3];
A= Transpose[Table [f[B[[i]]],{i,1,3}]];
MatrizForm[A]

Out[1]:= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos los valores propios de varias formas:

1. Calculamos el polinomio característico

In[2]:= **p[t_] = Det[A - t*B]**

Out[2]:= $20 - 24\,t + 9\,t^2 - t^3$

Calculamos los valores propios, esto es, las raíces del polinomio característico:

In[3]:= **Solve[p[t]==0, t]**

Out[3]:= {{t -> 2}, {t -> 2}, {t -> 5}}

Por tanto, los valores propios del endomorfismo son 2, 2 y 5.

2. En Mathematica ya existe una orden **Eigenvalues[]** que calcula directamente los valores propios:

In*[4]:=* **Eigenvalues[A]**

Out[4]:= {5, 2, 2}

3. **Eigensystem[]** también calcula los valores propios de la siguiente forma:

In*[5]:=* **Eigensystem[A][[1]]**

Out[5]:= {5, 2, 2}

Para calcular los vectores propios también lo hacemos de varias formas:

1. Calculando una base del Ker(f - λI) para cada uno de los valores propios λ:

Para λ = 5,

In[6]:= **baseV5= NullSpace[A-5*B]**

Out[6]:= {{1, 1, 1}}

Para λ = 2,

In[7]:= **baseV2= NullSpace[A-2*B]**

Out[7]:= {{-1, 0, 1},{-1, 1, 0}}

Observamos que, dim V_5 + dim V_2 = 3, por tanto, es diagonalizable por semejanza, y la base de vectores propios es:

In[8]:= **base=Join[baseV5, baseV2]**

Out[8]:= {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1},{-1, 1, 0}}

In[9]:= **Det[base] ≠ 0**

Out[9]:= True

2. En Mathematica existe una orden **Eigenvectors[]** que calcula esto directamente la base de vectores propios:

In[10]:= **Eigenvectors[A]**

Out[10]:= {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1},{-1, 1, 0}}

3. **Eigensystem[]**, calcula también la base de vectores propios:

In[11]:= **Eigensystem[A][[2]]**

Out[11]:= {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1},{-1, 1, 0}}

■

En general, puede ocurrir que el polinomio característico no tenga exactamente n raíces. Una primera posibilidad involucra al cuerpo que se esté considerando, así si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, todas las raíces del polinomio han de estar en $\mathbb{C}$, pero si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puede suceder que el polinomio característico tenga raíces imaginarias que no nos sirven como autovalores, incluso aun cuando tenga todas las raíces en $\mathbb{R}$, puede tener menos de n valores propios distintos por la aparición de raíces múltiples.

Para cada i, llamaremos **multiplicidad algebraica** del valor propio λ_i a la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio característico, es decir, el mayor exponente α_i para el cual el factor $(\lambda_i-\lambda)^{\alpha_i}$ aparece en la descomposición de $p(\lambda)$. Llamaremos **multiplicidad geométrica** de λ_i a la dimensión d_i del subespacio propio V_{λ_i}, esto es:

$$d_i = \dim(V_{\lambda_i}) = n - rg(A-\lambda_i I)$$

La relación entre las multiplicidades algebraicas y geométricas viene dada por el siguiente resultado.

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $f: V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V de matriz asociada A y sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ sus valores propios distintos. Entonces para cada $i = 1,...,r$ se tiene $1 \leq d_i \leq \alpha_i$.

2. DIAGONALIZACIÓN DE UN ENDOMORFISMO POR SEMEJANZA.

Se dice que una matriz cuadrada A es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal D semejante a A. Diremos que el endomorfismo $f:V \longrightarrow V$ es **diagonalizable** si existe una base de V con respecto a la cual la matriz asociada a f es diagonal.

Proposición

Un endomorfismo $f:V \longrightarrow V$ es diagonalizable si existe una base de V formada por vectores propios de f.

Lema

1. Vectores propios no nulos asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.
2. Los subespacios propios asociados a valores propios distintos son subespacios independientes.

Teorema

Sea $f: V \longrightarrow V$ un endomorfismo y sean $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$ sus distintos valores propios. Entonces f es diagonalizable si, y solo si, se verifica las siguientes condiciones:

1. $\alpha_1 +...+ \alpha_r = n$ (todas las raíces del polinomio característico de f están en $\mathbb{K}$).
2. $d_i = \alpha_i$, para cada $i = 1,...,r$.

Corolario

Sea A una matriz cuadrada de orden n, si A tiene n valores propios distintos en $\mathbb{K}$, entonces es diagonalizable.

El problema de la diagonalización se resume:

Paso 1: Se calcula el polinomio característico $p(\lambda)$.

Paso 2: Descomponemos p(λ) se calculan sus raíces. Si alguna de ellas es compleja, la matriz no será diagonalizable en $\mathbb{R}$, pero puede serlo en $\mathbb{C}$. Tenemos calculada los valores propios y sus multiplicidades algebraicas.
Paso 3: Se calculan las multiplicidades geométricas, $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$.
Paso 4: Se aplica el criterio de diagonalización. si para algún i se tiene $d_i \neq \alpha_i$, entonces la matriz no es diagonalizable. En caso contrario la matriz es diagonalizable y su forma diagonal es la matriz diagonal cuya diagonal está formada por los autovalores repetidos cada uno según su multiplicidad.
Paso 5: Obtenemos bases de los subespacios propios $V_{\lambda i} = Ker(f - \lambda_i I)$.
Paso 6: Uniendo estas bases se obtiene una base de V para la cual la matriz asociada es D. Así pues la matriz de cambio de base, cuyas columnas son las coordenadas de estos vectores propios, es la matriz de paso P que verifica $D = P^{-1}AP$.

Ejemplo 10.2. Sea f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$f(x, y, z) = (3x+y+z, x+3y+z, x+y+3z)$$

¿Es diagonalizable? En caso afirmativo calcular una matriz diagonal D y una matriz regular P, de forma que $D = P^{-1}AP$, siendo A la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

Para que el endomorfismo sea diagonalizable hemos de comprobar que los vectores propios obtenidos con **Eigenvectors[]**, forman una base, es decir, la matriz formada por ellos es regular:

In[12]:= **If[Det[Eigenvectors[A] ≠ 0, Print[“Es diagonalizable”], Print[“No es diagonalizable”]];**

Out[12]:= Es diagonalizable

También podemos determinar la matriz P, para que A sea diagonalizable esta debe ser regular:

In[13]:= **P =Transpose[Eigenvectors[A]];**
If[Det[P] ≠ 0, Print[“Diagonalizable: P =”, MatrixForm[P]],
Print[“No es diagonalizable”]];

Out[13]:= Diagonalizable: P = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Eigensystem[], calcula los valores propios (y con ellos la matriz D) y, si existe, la base de vectores propios del endomorfismo, y con ellos la matriz P:

In[14]:= **Diagonalizar = Eigensystem[A]**
d = DiagonalMatrix[Diagonalizar[[1]]];
P = Transpose[Diagonalizar[[2]]];
If[Det[P] ≠ 0, Print[“Diagonalizable: P =”, MatrixForm[P], “ y D = ”,

MatrixForm[d]], Print["No es diagonalizable"]];

Out[14]:= {{2, 2, 5}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}

Diagonalizable: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aunque en este caso sabemos que f es diagonalizable por lo realizado en el ejemplo 1, lo hemos comprobado de nuevo, calculando el determinante de P y como es distinto de cero, Eigensystem[A][[2]] es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios. Veamos ahora que se tiene la relación $P^{-1}AP = D$:

In[15]:= **Inverse[P].A.P == d**

Out[15]:= True

■

Veamos ahora un ejemplo de endomorfismo no diagonalizable:

Ejemplo 10.3. Sea f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Es diagonalizable? En caso afirmativo calcular una matriz diagonal D y una matriz regular P, de forma que $D = P^{-1}AP$, siendo A la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

In[16]:= **A = {{3, 0, 0},{1, 3, 0},{1, 1, 3}};**
v = Eigensystem[A]

Out[16]:= {{3, 3, 3},{{0, 0, 1}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}}

In[17]:= **If[Det[v[[2]] ≠ 0, Print["Diagonalizable"],**
Print["No diagonalizable"]];

Out[17]:= No diagonalizable

■

3.- APLICACIONES DE LA DIAGONALIZACIÓN

Entre las aplicaciones de la diagonalización podemos destacar:

a) Calculo de la raíz cuadrada de una matriz diagonalizable:

Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalizable de forma que todos sus valores propios tienen raíz cuadrada en $\mathbb{R}$, entonces existe una matriz $C \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $C^2 = A$.

b) Calculo de la potencia de una matriz diagonalizable:

Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalizable en $\mathbb{R}$ con $D = P^{-1}AP$, donde D es la matriz diagonal y $m \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que

$$A^m = P\,D^m\,P^{-1}$$

donde la matriz D^m es diagonal y se obtiene de D elevando a n los elementos de la diagonal de D. Si además A fuese regular y p un entero negativo tendríamos $A^p = (A^{-1})^m$ donde $m = -p \in \mathbb{Z}^+$. Repitiendo el proceso anterior para A^{-1} en lugar de A podemos calcular A^p.

Ejemplo10.4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular aplicando que es diagonalizable $A^{1/2}$, A^{12} y A^{-7} cuando sea posible.

Insertamos A y calculamos valores y vectores propios:

In[18]:= **A={{3,1,1}, {1,3,1}, {1,1,3}};**
v=Eigensystem[A]

Out[18]:= {{2, 2, 5}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}

In[19]:= **Det[v[[2]]]!=0**

Out[19]:= True

In[20]:= **d=DiagonalMatrix[v[[1]]];**
P = Transpose[v[[2]]];
Print["D = ", MatrixForm[d]]
Print["P = ", MatrixForm[P]]
Inverse[P].A.P == d

Out[20]:=

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

True

In[21]:= **c = P.DiagonalMatrix[v[[1]]^(1/2)].Inverse[P];**

MatrixForm[c]

Out[21]:=

$$\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}.$$

En efecto, si elevamos al cuadrado lo anterior obtenemos la matriz A:

In[22]:= **MatrixForm[c.c//N]**

Out[22]:=

$$\begin{pmatrix} 3. & 1. & 1. \\ 1. & 3. & 1. \\ 1. & 1. & 3. \end{pmatrix}$$

In[23]:= **P.(d^12).Inverse[P]**

Out[23]:=

{{81382939, 81378843, 81378843},

{81378843, 81382939, 81378843},

{81378843, 81378843, 81382939}}

Comprobamos usando la orden MatrixPower que la anterior coincide con A^{12}:

In[24]:= **MatrixPower[A,12]**

Out[24]:=

{{81382939, 81378843, 81378843},

{81378843, 81382939, 81378843},

{81378843, 81378843, 81382939}}

In[25]:= **P.DiagonalMatrix[v[[1]]^(-7)].Inverse[P]//MatrixForm**

Out[25]:=

$$\begin{pmatrix} \frac{26063}{5000000} & -\frac{25999}{10000000} & -\frac{25999}{10000000} \\ -\frac{25999}{10000000} & \frac{26063}{5000000} & -\frac{25999}{10000000} \\ -\frac{25999}{10000000} & -\frac{25999}{10000000} & \frac{26063}{5000000} \end{pmatrix}$$

De nuevo lo comprobamos usando MatrixPower:

In[26]:= **MatrixPower[A,-7] //MatrixForm**

Out[26]:=

$$\begin{pmatrix} \frac{26063}{5000000} & -\frac{25999}{10000000} & -\frac{25999}{10000000} \\ -\frac{25999}{10000000} & \frac{26063}{5000000} & -\frac{25999}{10000000} \\ -\frac{25999}{10000000} & -\frac{25999}{10000000} & \frac{26063}{5000000} \end{pmatrix}$$

■