Ejercicio 1 – Convocatoria Extraordinaria 2 – Curso 20/21

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & m \\ 0 & 1 & -m & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ m & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com m un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A?

b) Para $m = 1$, calcular B^{-1} usando la forma normal de Hermite por filas, siendo $B = A_{23}$ (se obtiene de A eliminando la fila 2 y la columna 3).

c) Usar el resultado anterior para resolver la ecuación matricial $X.B - B^2 = \mathrm{Id}$.

a) A tiene inversa sii $|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & m \\ 0 & 1 & -m & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ m & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-m).\alpha_{23} = (-m).(-1)^{2+3}.A_{23} =$$

$$= m . \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= m\left(2 + 3m - 2m^2 + 3\right) =$$

$$= m\left(-2m^2 + 3m + 5\right) = 0$$

$\Leftrightarrow m = 0$ ó $-2m^2 + 3m + 5 = 0$

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{-4} = \frac{-3 \pm 7}{-4}$$

$m = -1$ $m = \frac{5}{2}$

A tiene inversa sii $m \neq 0, -1, \frac{5}{2}$.

b) $A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A_{23} \mid Id) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_f \quad F_3 \leftrightarrow F_3 - F_1$$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \quad F_2 \leftrightarrow \frac{1}{2} F_2$$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \quad \begin{array}{l} F_1 \leftrightarrow F_1 + F_2 \\ F_3 \leftrightarrow F_3 - 2F_2 \end{array}$$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \quad F_3 \leftrightarrow \frac{1}{3} F_3$$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \sim_f \quad \begin{array}{l} F_1 \leftrightarrow F_1 + \frac{1}{2} F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_2 + \frac{3}{2} F_3 \end{array}$$

$$\sim_f \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 5/6 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{matrix}} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

c) $X \cdot B - B^2 = Id$

$$(X - B) \cdot B = Id \Rightarrow (X - B) \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{= Id} = \underbrace{Id \cdot B^{-1}}_{= B^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X - B = B^{-1} \Rightarrow X = B + B^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11/6 & 2/3 & 7/6 \\ -1/2 & 2 & -5/2 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$