Álgebra (Grado en Ingeniería Informática)
Convocatoria Extraordinaria 2 del curso 2016/17

2.- [10 puntos] Sea $\sigma = (1\ 2\ 3\ 7)\ (2\ 3)\ (2\ 3\ 7\ 1)\ (2\ 9) \in S_{10}$.

A) Razonar:

a) [2 puntos] σ es un ciclo y $\sigma \in A_{10}$.

b) [2 puntos] σ no conmuta con ninguna permutación distinta de la identidad y su inversa en S_{10}.

c) [2 puntos] $\sigma^{349} = \sigma$.

B) [4 puntos] Calcular un número n natural tal que $\sigma^n = Id$ y probar que $H = \{\sigma^k \ / \ 0 \leq k < n\}$ es un subgrupo de S_{10}.

$$\sigma = (1237)(23)(2371)(29) = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{10} \\ 7 & 9 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$= (1\ 7\ 2\ 9\ 3)$ Es un ciclo de longitud 5.

a) <u>σ es un ciclo.</u>

$\sigma = (1\ 7\ 2\ 9\ 3) = (1\ 7)(7\ 2)(2\ 9)(9\ 3)$

$sign(\sigma) = (-1)^4 = 1$, <u>Por tanto σ es par</u>

<u>$\sigma \in A_{10}$.</u>

b) S_{10} es grupo, por tanto verifica la prop de elemento simétrico. Por tanto existe σ^{-1} y además pertenece a S_{10}.

σ es un ciclo, y permuta con cualquier ciclo con soporte disjunto con el de σ o disjuntos como ciclos.

$\sigma(5\ 6) = (5\ 6)\sigma$.

c) σ^{349}

Un ciclo elevado a su longitud da la identidad.

$(1\ 7\ 2\ 9\ 3)^5 = I$. $\qquad 349 = 69 \cdot 5 + 4$.

$$\begin{array}{l|l} 349 & 5 \\ \hline 49 & 69 \\ 4 & \end{array}$$

$(1\,7\,2\,9\,3)^{349} = \left((1\,7\,2\,9\,3)^5\right)^{69} \cdot (1\,7\,2\,9\,3)^4 =$

$= (1\,7\,2\,9\,3)^{69 \cdot 5 + 4}$

$\sigma^{349} = \sigma^4$; $\quad \sigma^4 \cdot \sigma = \sigma^5 = I$

$\sigma^4 = \sigma^{-1}$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 9 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 2 & 10 \end{pmatrix} =$$

$= (1\ 3\ 9\ 2\ 7)$

$\sigma \cdot \sigma^{-1} = (1\,7\,2\,9\,3)(1\,3\,9\,2\,7) = I$

$\sigma \neq \sigma^{-1}$.

B) $n \in \mathbb{N}$ tq $\sigma^n = I$. $\quad \boxed{n=5}$

$n > 0$.

$\sigma^5 = I$.

$$H = \{ \sigma^k \ / \ 0 \leq k < n \} = \{ I, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4 \}.$$

¿ Subgrupo ?

Definición
$$\begin{cases} (1) & I \in H \\ (2) & \sigma \in H \Rightarrow \sigma^{-1} \in H \\ (3) & \sigma, \tau \in H \Rightarrow \sigma \cdot \tau \in H. \end{cases}$$

(1) $I \in H$.

(2) $I^{-1} = I$ $\qquad (\sigma^2)^{-1} = \sigma^3$ $\qquad (\sigma^4)^{-1} = \sigma$.

$\sigma^{-1} = \sigma^4$ $\qquad (\sigma^3)^{-1} = \sigma^2$

(3)

	I	σ	σ^2	σ^3	σ^4
I	I	σ	σ^2	σ^3	σ^4
σ	σ	σ^2	σ^3	σ^4	I
σ^2	σ^2	σ^3	σ^4	I	σ
σ^3	σ^3	σ^4	I	σ	σ^2
σ^4	σ^4	I	σ	σ^2	σ^3

En efecto, es subgrupo.