

Ejercicio 2 – Extraordinaria 2 – Curso 2021/22

Consideremos el espacio vectorial $V=M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas reales de orden 2.

A) Dado el subespacio vectorial:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} : a + b + c = 0 \right\},$$

calcular, de forma razonada, dimensión, una base B , ecuaciones paramétricas e implícitas de U .

B) Consideremos en U el producto escalar que con respecto a la base B obtenida en el apartado anterior, satisface que los vectores de la base B son unitarios y dos a dos forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$. Obtener la matriz de Gram respecto de la base B . ¿Es B ortogonal? En caso negativo, obtener una base ortogonal de U .

$$\begin{aligned} A) \quad U &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a} & b \\ c & \underline{a} \end{pmatrix} \text{ y } a+b+c=0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x=t \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$x = -y - z$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = -\alpha - \beta \end{array} \right\} \text{ Ec. par.}$$

$$B_U = \{ (-1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, -1) \}$$

$$\dim(U) = 2$$

$$B) \quad B_U = \{ e_1, e_2 \}$$

$$\|e_1\| = 1 \Rightarrow \underline{\langle e_1, e_1 \rangle = 1} = a_{11}$$

$$\|e_2\| = 1 \Rightarrow \underline{\langle e_2, e_2 \rangle = 1} = a_{22}$$

$$e_1 \wedge e_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{\|e_1\| \cdot \|e_2\|}$$

$$\Downarrow \\ \underline{\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{2}} = a_{12} = a_{21}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

B_u no es ortogonal ya que $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow e_1 \wedge e_2 = \frac{\pi}{2}$$

Gram-Schmidt

$$B = \{u_1, u_2\}$$

$$u_1 = e_1$$

$$u_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 =$$

$$= e_2 - \frac{1/2}{1} \cdot e_1 = e_2 - e_1$$

$$B_{\text{ortg}} = \{(-1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, -1) - (-1, 1, 0, -1)\}$$

$$= \{(-1, 1, 0, -1), (0, -1, 1, 0)\}$$

— {

