Ejercicio 2 – Ordinaria 1 – Curso 2021/22

En el espacio vectorial V=$M_2(\mathbb{R})$ de las matrices reales de orden 2 se considera el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Se pide:

a) Usando el desarrollo de Laplace del determinante probar que S es un conjunto de vectores linealmente dependiente.

b) Sea U = L(S), el subespacio vectorial generado por S. Calcular B_U una base y las ecuaciones implícitas de U.

c) Consideremos en V el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Obtener una base de $U^{\perp}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-12+4-4+4-4+12) - 2(-4+4+4-4) = 0$$

$\Rightarrow rg(A) < 4 \Rightarrow S$ es un conjunto l. dependiente.

a) $U = L(S)$

$$A \underset{\substack{F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - 2F_1}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_2 \\ F_4 \to F_4 - 2F_2}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{\mathcal{U}} = \{(1,0,0,2),(0,1,1,1)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(\mathcal{U}) = 2$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \beta \\ t = 2\alpha + \beta \end{array}\right\}$$

$$\text{nº ec. implícitas} = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(\mathcal{U}) = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}$$

$$\begin{array}{l} y = z \\ t = 2x + y \end{array} \Rightarrow \text{Ec. implícitas:} \left\{ \begin{array}{l} y - z = 0 \\ 2x + y - t = 0 \end{array} \right.$$

c) $\mathcal{U}^{\perp} = \{(x,y,z,t) / \langle (x,y,z,t), u \rangle = 0, \ \forall u \in \mathcal{U}\} =$

$$= \left\{ (x,y,z,t) / \begin{array}{l} \langle (x,y,z,t),(1,0,0,2)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z,t),(0,1,1,1)\rangle = 0 \end{array} \right\}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle (x,y,z,t),(1,0,0,2)\rangle = (x,y,z,t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (x+t, y, z, x+2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (x+t) + 2(x+2t)$$

$$\| $$

$$\underline{3x + 5t = 0}$$

$$\langle (x,y,z,t),(0,1,1,1)\rangle = (x,y,z,t)\, G \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1 \end{pmatrix} =$$

$$= (x+t,\ y,\ z,\ x+2t) \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1 \end{pmatrix} = y + z + x + 2t = 0$$

$$U^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \;\middle/\; \begin{array}{l} 3x+5t=0 \\ x+y+z+2t=0 \end{array} \right\}$$