Sean $p(x) = 4x - 6x^2 - 2\,x^3 - 6x^4 + 4x^5$ y $q(x)$ el polinomio no mónico de grado 4 con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y coeficiente líder igual a 2 y cuyas raíces en $\mathbb{R}[x]$ son los números del conjunto $S = \{0,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}$. Se pide:

A) Obtener $q(x)$.

B) Calcular, usando el algoritmo de Euclides en $\mathbb{Z}_7[x]$, el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ en dicho anillo. ¿Es $2x + 6x^2 + x^3$ un máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ en $\mathbb{Z}_7[x]$?

A) $q(x) = 2\,x\,(x-\frac{1}{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) =$

$= x\,(2x-1)(x^2-2) = (2x^2-x)(x^2-2)$

$= 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x$

B) $p(x) = 4x^5 + x^4 + 5x^3 + x^2 + 4x$

$-\bar{p}$ en $\mathbb{Z}_n$ es $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$ tq $\bar{p} + \bar{x} = \bar{0} = \bar{n}$

$-6 = 1$ ya que $\bar{6} + \bar{1} = \bar{0}$

$-2 = 5$ ya que $\bar{2} + \bar{5} = \bar{0}$

$q(x) = 2x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 2x \neq 0$

$2 \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_7[x]) = \mathcal{U}(\mathbb{Z}_7) = \mathbb{Z}_7 - \{0\}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{4x^5} + x^4 + 5x^3 + x^2 + 4x & 2x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 2x \\ \hline -(\cancel{4x^5} + 5x^4 + 6x^3 + 4x^2) & 2x + 5 \\ \quad \cancel{3x^4} + 6x^3 + 4x^2 + 4x & \\ -(\cancel{3x^4} + 2x^3 + x^2 + 3x) & \\ \quad 4x^3 + 3x^2 + x \neq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^4} + 6x^3 + 3x^2 + 2x & 4x^3 + 3x^2 + x \\ \hline -(\cancel{2x^4} + 5x^3 + 4x^2) & 4x + 2 \\ \quad x^3 + 6x^2 + 2x & \\ -(x^3 + 6x^2 + 2x) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

m.c.d $= 4x^3 + 3x^2 + x$

$u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_7[x]) \qquad u \cdot (4x^3+3x^2+x) = 2x+6x^2+x^3$

$u = 2 \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_7[x])$

$2(4x^3+3x^2+x) = x^3+6x^2+2x$