

Álgebra (Grado en Ingeniería Informática)

Convocatoria Extraordinaria 2 del curso 2018/19

1. [10 puntos] Dado el polinomio

$$p(x) = 36 - 360x + 468x^2 + 2160x^3 + 1296x^4$$

a) Factorizar y calcular sus raíces y multiplicidades algebraicas, en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$.

b) ¿Cuántos polinomios están asociados a $p(x)$ en $\mathbb{Z}_5[x]$? Razonar la respuesta.

$$p(x) = 36 \underbrace{(1 - 10x + 13x^2 + 60x^3 + 36x^4)}$$

$\mathbb{Z}[x]$

$$p(1) \neq 0, \quad p(1) = 36(1 - 10 + 13 + 60 + 36) > 0.$$

$$\boxed{p(-1) = 0}, \quad p(-1) = 36(1 + 10 + 13 - 60 + 36) = 0.$$

-1 es raíz.

↓

$$(x+1) \mid p(x).$$

$$\begin{array}{r}
 36x^4 + 60x^3 + 13x^2 - 10x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x+1 \\ 36x^3 + 24x^2 - 11x + 1 \end{array} \right. \\
 -36x^4 - 36x^3 \\
 \hline
 24x^3 + 13x^2 - 10x + 1 \\
 -24x^3 - 24x^2 \\
 \hline
 -11x^2 - 10x + 1 \\
 +11x^2 + 11x \\
 \hline
 -x + 1 \\
 -x - 1 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

$$p(x) = 36(x+1) \underbrace{(36x^3 + 24x^2 - 11x + 1)}_{q(x)}$$

$$q(-1) = -36 + 24 + 11 + 1 = 0. \Leftrightarrow (x+1) \mid 36x^3 + 24x^2 - 11x + 1.$$

$$\begin{array}{r} 36x^3 + 24x^2 - 11x + 1 \quad \overline{) \quad x+1} \\ -36x^3 - 36x^2 \\ \hline -12x^2 - 11x + 1 \\ + 12x^2 + 12x \\ \hline x + 1 \\ -x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$p(x) = 6^2(x+1)^2 \underbrace{(36x^2 - 12x + 1)}_{q_1(x)}$$

$$q_1(\pm) = 36 + 12 + 1 > 0$$

ya no hay más raíces enteras.

$$\mathbb{Q}[x] \quad D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$+ \frac{1}{\bullet} \leftarrow$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$q_2\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$$

$$q_1\left(\frac{-1}{2}\right) \neq 0$$

⋮

$$q_1\left(\frac{1}{6}\right) = 0 = 36 \cdot \frac{1}{36} - 12 \cdot \frac{1}{6} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

$$\left(x - \frac{1}{6}\right) \mid (36x^2 - 12x + 1)$$

$$\begin{array}{r} 36 \quad -12 \quad 1 \\ \frac{1}{6} \quad \quad \quad 6 \quad -1 \\ \hline 36 \quad -6 \quad \boxed{0} \end{array}$$

$$36x^2 - 12x + 1 = 6 \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right) (6x - 1) = (6x - 1)^2.$$

$$\boxed{p(x) = 2^2 \cdot 3^2 (x+1)^2 (6x-1)^2} *$$

$$\underline{\mathbb{Z}[x]} \quad p(x) = 2^2 \cdot 3^2 (x+1)^2 (6x-1)^2.$$

Raíces: -1 con multiplicidad 2.

$$\underline{\mathbb{C}[x]} \quad p(x) = 2^4 \cdot 3^4 (x+1)^2 \left(x - \frac{1}{6}\right)^2$$

Raíces: -1 , multiplicidad 2

$\frac{1}{6}$, " 2.

$$\underline{\mathbb{Z}_5[x]} \quad p(x) = 36 (x+1)^2 (6x-1)^2 = 1 (x+1)^2 (x+4)^2$$

Raíces: 4 , multiplicidad 2

1 , " 2.

$$b) \quad U(\mathbb{Z}_5[x]) = U(\mathbb{Z}_5) = \{1, 2, 3, 4\}$$

A cambio, $a, b \in A$ son asociados si existe $u \in U(A)$ tal que

$$a = u \cdot b$$

Los asociados a $p(x)$ serán: $1 \cdot p(x)$, $2 \cdot p(x)$, $3 \cdot p(x)$ y $4 \cdot p(x)$.