Álgebra. Grado en Ingeniería Informática.
Convocatoria Ordinaria 2. Curso 2020/21

1. [*0.75 puntos*] Calcular la factorización en irreducibles en $Z[x]$ y $Z_7[x]$ de un polinomio, p(x), de grado 8, cuyo coeficiente líder es 36, tiene sólo cuatro raíces reales, todas simples $(-1, 1/2, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$, y el único polinomio irreducible de su factorización en R[x], que no es de grado uno, es x^2+x+1.

$p(x) \qquad \mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Z}_7[x]$.

$\underline{\mathbb{Z}[x]}$

$$\left.\begin{array}{lll} -1 & \rightsquigarrow & (x+1)^1 \\ 1/2 & \rightsquigarrow & (x-\frac{1}{2})^1 \\ \sqrt{3} & \rightsquigarrow & (x-\sqrt{3})^1 \\ -\sqrt{3} & \rightsquigarrow & (x+\sqrt{3})^1 \end{array}\right\} \quad p(x) \text{ en } \mathbb{R}[x]$$

x^2+x+1

$$p(x) = 36\,(x+1)^1(x-\tfrac{1}{2})^1(x-\sqrt{3})^1(x+\sqrt{3})^1(x^2+x+1)^2 \quad \text{en } \mathbb{R}[x]$$

$$= 18\,(x+1)(2x-1)\underbrace{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}_{x^2-3}(x^2+x+1)^2 \quad \text{en } \mathbb{R}[x]$$

$$\boxed{p(x) = 18\,(x+1)(2x-1)(x^2-3)(x^2+x+1)^2 \quad \text{en } \mathbb{Z}[x]}$$

$\mathbb{Z}_7[x]$

Partimos de la factorización de $\mathbb{Z}[x]$.

$$p(x) = 18(x+1)(2x-1)(x^2-3)(x^2+x+1)^2$$

$$\Big\downarrow \; \mathbb{Z}_7[x]$$

$$p(x) = 4(x+1)(2x+6)(x^2+4)(x^2+x+1)^2$$

$$= (x+1)(x+3)\underbrace{(x^2+4)}_{q_1(x)}\underbrace{(x^2+x+1)}_{q_2(x)}{}^2$$

$q_1(x) = x^2+4$, $\quad q_1(0) = 4 \neq 0$, $q_1(1) = 5 \neq 0$, $q_1(2) = 8 = 1 \neq 0$

$q_1(3) = 13 = 6 \neq 0$, $q_1(4) = 20 = 6$, $q_1(5) = 1 \neq 0$

$q_1(6) = 40 = 5 \neq 0$.

Por tanto $q_1(x)$ es irreducible.

$q_2(x) = x^2+x+1$, $\quad q_2(0) = 1 \neq 0$, $q_2(1) = 3 \neq 0$

$q_2(2) = 7 = 0$. (2 es raíz).

$q_2(3) = 13 = 6 \neq 0$

$q_2(4) = 21 = 0$ (4 es raíz)

$q_2(2) = 0 \rightsquigarrow (x-2) = (x+5)$

$q_2(4) = 0 \rightsquigarrow (x-4) = (x+3)$

$$q_2(x) = x^2+x+1 = (x+5)(x+3).$$

$$p(x) = (x+1)(x+3)\underbrace{(x^2+4)}_{\text{Irreducible}}(\underbrace{x^2+x+1}_{(x+3)(x+5)})^2$$

$$\boxed{p(x) = (x+1)(x+3)^3(x+5)^2(x^2+4) \quad \text{en } \mathbb{Z}_7[x]}$$