Ejercicio 1. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & m \\ 0 & 1 & -m & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ m & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com m un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz <u>inversa</u> de A?

b) Para $m = 0$, si H es la forma normal de Hermite de A, calcular una matriz Q regular tal que $H = QA$.

c) Para $m = 1$, calcular B^{-1} usando la forma normal de Hermite por filas, siendo $B = A_{23}$ (se obtiene de A eliminando la fila 2 y la columna 3).

d) Usar el resultado anterior para resolver la ecuación matricial $X.B - B^2 = \text{Id}$.

a) A tiene inversa sii $|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & m \\ 0 & 1 & -m & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ m & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -m \cdot \alpha_{23} = (-m)(-1)^{2+3} A_{23} =$$

$$= m \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= m(2 + 3m - 2m^2 + 3) =$$

$$= m(-2m^2 + 3m + 5) = 0$$

$m = 0$ $\qquad -2m^2 + 3m + 5 = 0$

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{-4} = \frac{-3 \pm 7}{-4}$$

$m = -1 \qquad m = \frac{5}{2}$

A tiene inversa sii $m \neq 0, -1, \frac{5}{2}$.

b) $m=0$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_f$$

$F_1 \leftrightarrow F_1 + F_2$

$F_3 \leftrightarrow F_3 - 2F_2$

$F_4 \leftrightarrow F_4 - F_2$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-9} & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f$$

$F_3 \leftrightarrow -\frac{1}{9} F_3$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f$$

$F_1 \leftrightarrow F_1 - 3F_3$

$F_2 \leftrightarrow F_2 - 3F_3$

$F_4 \leftrightarrow F_4 + 2F_3$

$$\sim_f \left(\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}_{= H} \left| \underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & -5/9 & 2/9 & 1 \end{array}}_{= Q} \right.\right)$$

$Q \cdot A = H$

c) $A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A_{23} \mid Id) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_f$$

$F_3 \leftrightarrow F_3 - F_1$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f$$

$F_2 \leftrightarrow \frac{1}{2} F_2$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f$$

$F_1 \leftrightarrow F_1 + F_2$

$F_3 \leftrightarrow F_3 - 2F_2$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_f$$

$F_3 \leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot F_3$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \sim_f$$

$F_1 \leftrightarrow F_1 + \frac{1}{2} F_3$

$F_2 \leftrightarrow F_2 + \frac{3}{2} \cdot F_3$

$$\sim_f \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 5/6 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{matrix}} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

d) $\underline{X} \cdot B - B^2 = Id$

$$(\underline{X} - B) \cdot B = Id \Rightarrow (\underline{X} - B) \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{= Id} = \underbrace{Id \cdot B^{-1}}_{= B^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X} - B = B^{-1} \Rightarrow \underline{X} = B + B^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11/6 & 2/3 & 7/6 \\ -1/2 & 2 & -5/2 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$