Curso 2018-19. Convocatoria ordinaria 2.

Consideramos los grupos S_3 y A_3 con la operación composición de permutaciones y $\mathbb{Z}$ con la suma. Se pide:

a) Definir una operación $*$ en $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ que lo dote de estructura de grupo.

b) Calcular, si es posible, 3 elementos distintos de $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ tales que al operarlos consigo mismo resulte el elemento neutro del grupo.

c) Calcular, si es posible, dos subgrupos distintos de 3 elementos y dos subgrupos distintos de 6 elementos.

d) Calcular el simétrico de $(\sigma, \tau, 5)$ donde $\sigma = (2\ 3)$ y $\tau = (1\ 2\ 3)$.

a)
$$\left.\begin{array}{ll} (S_3, \circ) & \text{grupo} \\ (A_3, \circ) & \text{"} \\ (\mathbb{Z}, +) & \text{"} \end{array}\right\} \Rightarrow G = S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z} \text{ es grupo por producto cartesiano de grupo, con operación}$$

$$(\sigma_1, \beta_1, z_1) * (\sigma_2, \beta_2, z_2) = (\sigma_1 \circ \sigma_2, \beta_1 \circ \beta_2, z_1 + z_2)$$

$$e_G = (e_{S_3}, e_{A_3}, e_{\mathbb{Z}}) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{= I}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{= I}, 0 \right)$$

$$a = (\sigma, \beta, z) \Rightarrow a' = (\sigma', \beta', z') = (\sigma^{-1}, \beta^{-1}, -z)$$

Curso 2018-19. Convocatoria ordinaria 2.

Consideramos los grupos S_3 y A_3 con la operación composición de permutaciones y $\mathbb{Z}$ con la suma. Se pide:

a) Definir una operación $*$ en $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ que lo dote de estructura de grupo.

b) Calcular, si es posible, 3 elementos distintos de $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ tales que al operarlos consigo mismo resulte el elemento neutro del grupo.

c) Calcular, si es posible, dos subgrupos distintos de 3 elementos y dos subgrupos distintos de 6 elementos.

d) Calcular el simétrico de $(\sigma, \tau, 5)$ donde $\sigma = (2\ 3)$ y $\tau = (1\ 2\ 3)$.

d) $(\sigma, \tau, 5)' = (\sigma^{-1}, \tau^{-1}, -5) = ((2\,3), (1\,3\,2), -5)$

· Calculemos σ^{-1}; $\sigma = (2\,3) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sigma^2 = I \\ \sigma\circ\sigma\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma^{-1} = \sigma$

· Calculemos τ^{-1}; $\tau = (1\,2\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\tau^3 = I \\ \tau\circ\tau^2 = \tau^2\circ\tau\end{array}\right\} \Rightarrow \tau^{-1} = \tau^2$

$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} (= \tau^2) = (1\,3\,2)$

Curso 2018-19. Convocatoria ordinaria 2.

Consideramos los grupos S_3 y A_3 con la operación composición de permutaciones y $\mathbb{Z}$ con la suma. Se pide:

a) Definir una operación $*$ en $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ que lo dote de estructura de grupo.

b) Calcular, si es posible, 3 elementos distintos de $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ tales que al operarlos consigo mismo resulte el elemento neutro del grupo.

c) Calcular, si es posible, dos subgrupos distintos de 3 elementos y dos subgrupos distintos de 6 elementos.

d) Calcular el simétrico de $(\sigma, \tau, 5)$ donde $\sigma = (2\ 3)$ y $\tau = (1\ 2\ 3)$.

b) $\boxed{a = (\sigma, \beta, z)} \in S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ tq $a * a = e$;

$(\sigma, \beta, z) * (\sigma, \beta, z) = (I, I, 0)$

$(\sigma \circ \sigma, \beta \circ \beta, z + z) = (I, I, 0)$

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & \sigma^2 = I \text{ en } S_3 \\ \text{ii)} & \beta^2 = I \text{ en } A_3 \\ \text{iii)} & 2z = 0 \text{ en } \mathbb{Z} \end{array} \right.$

iii) $2z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$

ii) $\beta^2 = I$ en $A_3 = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

$$\left.\begin{array}{l} (1\ 2\ 3)^2 = (1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 3\ 2) \neq I \\ (1\ 3\ 2)^2 = (1\ 3\ 2)^{-1} = (1\ 2\ 3) \neq I \\ I^2 = I \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\beta = I}$$

Curso 2018-19. Convocatoria ordinaria 2.

Consideramos los grupos S_3 y A_3 con la operación composición de permutaciones y $\mathbb{Z}$ con la suma. Se pide:

a) Definir una operación $*$ en $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ que lo dote de estructura de grupo.

b) Calcular, si es posible, 3 elementos distintos de $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ tales que al operarlos consigo mismo resulte el elemento neutro del grupo.

c) Calcular, si es posible, dos subgrupos distintos de 3 elementos y dos subgrupos distintos de 6 elementos.

d) Calcular el simétrico de $(\sigma, \tau, 5)$ donde $\sigma = (2\ 3)$ y $\tau = (1\ 2\ 3)$.

ii) $\sigma^2 = I$ en S_3 (σ ciclo de long. 2 $\Rightarrow \sigma^2 = I$)

$\sigma_1 = (1\ 2)$ $\quad \sigma_2 = (1\ 3)$, $\quad \sigma_3 = (2, 3)$

$a_1 = (\sigma_1, I, 0)$, $\quad a_2 = (\sigma_2, I, 0)$, $\quad a_3 = (\sigma_3, I, 0)$

$a_1 = ((1\ 2), I, 0)$, $\quad a_2 = ((1\ 3), I, 0)$, $\quad a_3 = ((2\ 3), I, 0)$

Curso 2018-19. Convocatoria ordinaria 2.

Consideramos los grupos S_3 y A_3 con la operación composición de permutaciones y $\mathbb{Z}$ con la suma. Se pide:

a) Definir una operación $*$ en $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ que lo dote de estructura de grupo.

b) Calcular, si es posible, 3 elementos distintos de $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ tales que al operarlos consigo mismo resulte el elemento neutro del grupo.

c) Calcular, si es posible, dos subgrupos distintos de 3 elementos y dos subgrupos distintos de 6 elementos.

d) Calcular el simétrico de $(\sigma, \tau, 5)$ donde $\sigma = (2\ 3)$ y $\tau = (1\ 2\ 3)$.

c)

$$H \leq \boxed{G' = S_3 \times A_3 \times \{0\}} \leq G = S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$$

$$|G'| = |S_3| \cdot |A_3| \cdot |\{0\}|$$
$$= 3! \cdot \frac{3!}{2} \cdot 1 = 6 \cdot 3 \cdot 1 = 18$$

¿$H \leq G'$? $\quad |H| = 3 \Longrightarrow 3 \mid 18 \Rightarrow$ El T^a de Lagrange no aporta inf.

$|H| = 6 \Longrightarrow 6 \mid 18$

$$H = H_1 \times H_2 \times H_3 \quad \begin{cases} \text{i) } H_1 \leq S_3 \\ \text{ii) } H_2 \leq A_3 \\ \text{iii) } H_3 \leq \{0\} \Rightarrow \boxed{\{0\} = H_3} \end{cases}$$

Curso 2018-19. Convocatoria ordinaria 2.

Consideramos los grupos S_3 y A_3 con la operación composición de permutaciones y $\mathbb{Z}$ con la suma. Se pide:

a) Definir una operación $*$ en $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ que lo dote de estructura de grupo.

b) Calcular, si es posible, 3 elementos distintos de $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ tales que al operarlos consigo mismo resulte el elemento neutro del grupo.

c) Calcular, si es posible, dos subgrupos distintos de 3 elementos y dos subgrupos distintos de 6 elementos.

d) Calcular el simétrico de $(\sigma, \tau, 5)$ donde $\sigma = (2\ 3)$ y $\tau = (1\ 2\ 3)$.

Así busco $H \leq S_3 \times A_3 \times \{0\}$ t.q. $|H| = 3$

y $H = H_1 \times H_2 \times H_3$

$3 = 1 \cdot 1 \cdot \cancel{3} \rightarrow H_3 \leq \{0\}$ y $\cancel{|H_3| = 3}$ $\rightarrow$ NO

$3 = 1 \cdot 3 \cdot 1 \Rightarrow \begin{cases} H_1 \leq S_3 & |H_1| = 1 \Rightarrow H_1 = \{I\} \\ H_2 \leq A_3 & |H_2| = 3 \Rightarrow H_2 = A_3 \\ H_3 = \{0\} & |H_3| = 1 \end{cases}$

$H = \{I\} \times A_3 \times \{0\}$

$\boxed{3 = 3 \cdot 1 \cdot 1}$

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{lll} H_1 \leq S_3 & |H_3| = 3 & \Rightarrow H_3 = A_3 \\ H_2 \leq A_3 & |H_2| = 1 & \Rightarrow H_2 = \{I\} \\ H_3 \leq \{0\} & |H_3| = 1 & \Rightarrow H_3 = \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow K = A_3 \times \{I\} \times \{0\}$

Curso 2018-19. Convocatoria ordinaria 2.

Consideramos los grupos S_3 y A_3 con la operación composición de permutaciones y $\mathbb{Z}$ con la suma. Se pide:

a) Definir una operación $*$ en $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ que lo dote de estructura de grupo.

b) Calcular, si es posible, 3 elementos distintos de $S_3 \times A_3 \times \mathbb{Z}$ tales que al operarlos consigo mismo resulte el elemento neutro del grupo.

c) Calcular, si es posible, dos subgrupos distintos de 3 elementos y dos subgrupos distintos de 6 elementos.

d) Calcular el simétrico de $(\sigma, \tau, 5)$ donde $\sigma = (2\ 3)$ y $\tau = (1\ 2\ 3)$.

Análogamente $H = H_1 \times H_2 \times H_3 \leq S_3 \times A_3 \times \{0\}$ t.q. $|H| = 6$

$6 = 1 \cdot 1 \cdot \cancel{6}$ $\quad \nexists H_3 \leq \{0\}$ $\quad |H_3| = 6$

$ 1 \cdot \cancel{6} \cdot 1$ $\quad \nexists H_2 \leq A_3$ $\quad |H_2| = 6$

$ 6 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow \begin{cases} H_1 \leq S_3 & |H_1| = 6 \Rightarrow H_1 = S_3 \\ H_2 \leq A_3 & |H_2| = 1 \Rightarrow H_2 = \{I\} \\ H_3 \leq \{0\} & |H_3| = 1 \Rightarrow H_3 = \{0\} \end{cases}$

$S_3 \times \{I\} \times \{0\}$

$ 1 \cdot 2 \cdot \cancel{3}$

$ 1 \cdot 3 \cdot \cancel{2}$

$ 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1 \Rightarrow \begin{cases} H_1 \leq S_3 & |H_1| = 3 \Rightarrow H_1 = A_3 \\ H_2 \leq A_3 & |H_2| = 2 \Rightarrow \nexists H_2 \quad 2 \nmid 3 \quad \text{T}^a \text{ Lag.} \end{cases}$

$ \boxed{2 \cdot 3 \cdot 1}$

$2 \cdot 3 \cdot 1$

$$\begin{cases} H_1 \leq S_3 & |H_1| = 2 \\ H_2 \leq A_3 & |H_2| = 3 \Rightarrow \underline{H_2 = A_3} \\ H_3 \leq \{0\} & |H_3| = 1 \Rightarrow \underline{H_3 = \{0\}} \end{cases}$$

$H_1 \leq S_3 \quad |H_1| = 2$

$H_1 = \{I, \tau\}$ $\quad \tau$ trasposición $(\tau^2 = I) \Rightarrow H_1$ subgrupo

sea $\tau = (1\ 3)$ trasp. $\Longrightarrow \underline{H_1 = \{I, (13)\}}$ subgrupo

$|H_1| = 2$

Así, $\{I, (13)\} \times A_3 \times \{0\}$ de orden 6

$S_3 \times \{I\} \times \{0\}$ " " 6