Ejercicio 2 – Convocatoria Extraordinaria 2 – Curso 2020/21

Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ y U el subespacio de V

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ b - c = 0,\ traza\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Se pide:

a) Calcular una <u>base</u> B de U y comprobar que $\dim(U) = 2$.

b) Consideremos en U el producto escalar que con respecto a la base B del apartado a) verifica que el primer vector es unitario, el módulo del segundo es $\sqrt{2}$ y que el ángulo que forman dos a dos es $\frac{\pi}{3}$. Obtener la matriz de Gram.

c) Obtener a partir de B una <u>base ortogonal</u>.

a) $$traza\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \implies a + d = 0$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ \begin{array}{l} b - c = 0 \\ a + d = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} b = c \\ a = -d \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = -\beta \\ b = \alpha \\ c = \alpha \\ d = \beta \end{array}\right\} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies B_U = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\alpha = 1 \text{ y } \beta = 0}^{= u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\alpha = 0 \text{ y } \beta = 1}^{= u_2} \right\}$$

$$\dim(U) = 2$$

b) $$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{11} = \langle u_1, u_1 \rangle = 1 \\ a_{12} = \langle u_1, u_2 \rangle \\ a_{22} = \langle u_2, u_2 \rangle = \|u_2\|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\| \cdot \|u_2\|} \implies \langle u_1, u_2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \|u_1\| \cdot \|u_2\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $e_1 = u_1$

$$e_2 = u_2 - \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = u_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} u_1$$

$$B' = \left\{ u_1, \ u_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$