Curso 2020-21. Convocatoria Extraordinaria 2. (Tema 2)

Dada la permutación $\sigma = (1\ 2\ 8\ 5)(2\ 5) \in S_8$. Consideremos $H = \{\sigma^k / k \in \mathbb{N}\}$. Comprobar que H es un subgrupo de S_8 y calcular su orden.

$$H = \{\sigma^k : k \in \mathbb{N}\} = \{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots\}$$

$$\sigma = (1\,2\,8\,5)(2\,5) = (1\,2)(5\,8) = \tau_1 \tau_2, \quad \tau_1 = (1\,2), \ \tau_2 = (5\,8)$$

τ ciclo de longitud $r \Rightarrow \tau^r = I$; $\tau_1^2 = I$, $\tau_2^2 = I$

$$\sigma^2 = (\tau_1 \tau_2)^2 = (\tau_1 \tau_2)(\tau_1 \tau_2) \overset{\text{Asoc.}}{=} \tau_1 (\tau_2 \tau_1) \tau_2 \underset{\text{disjuntos}}{\overset{\text{ciclos}}{=}} \tau_1 (\tau_1 \tau_2) \tau_2 =$$

$$\overset{\text{Asoc.}}{=} (\tau_1 \tau_1)(\tau_2 \tau_2) = \tau_1^2 \circ \tau_2^2 = I \circ I = I$$

$k=0 \quad \sigma^0 = I$

$k=1 \quad \sigma^1 = \sigma$

$k=2 \quad \sigma^2 = I$

$k=3 \quad \sigma^3 = \sigma\sigma^2 = \sigma \cdot I = \sigma$

— — — —

$$\sigma^k = \begin{cases} k \text{ par} & \sigma^k = I \\ k \text{ impar} & \sigma^k = \sigma \end{cases}$$

$\Downarrow$

$H = \{I, \sigma\}$ $\qquad |H| = 2$

Curso 2020-21. Convocatoria Extraordinaria 2. (Tema 2)

Dada la permutación $\sigma = (1\ 2\ 8\ 5)(2\ 5) \in S_8$. Consideremos $H = \{\sigma^k \,/\, k \in \mathbb{N}\}$. Comprobar que H es un subgrupo de S_8 y calcular su orden.

¿ $H \leq S_8$?

1ª forma: $H = \{I, \sigma\}$

$\circ$	I	σ
I	I	σ
σ	σ	I

$\sigma^2 = I$

$H \leq G$ sii $H \subseteq S_8$, $H \neq \emptyset$ $(I \in H)$ y verifica

i) ¿$e_G \in H$? $\quad e_{S_8} = I \in H$

ii) ¿$\forall a \in H \Rightarrow a' \in H$?

$I \in H \Rightarrow I^{-1} = I \in H$

$\sigma \in H \Rightarrow \sigma^{-1} = \sigma \in H$

iii) ¿$\forall a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$?

$\quad\quad a \circ b \in H$

Obvio a partir de la tabla

Δ 85)

$H \leq G$

Curso 2020-21. Convocatoria Extraordinaria 2. (Tema 2)

Dada la permutación $\sigma = (1\ 2\ 8\ 5)(2\ 5) \in S_8$. Consideremos $H = \{\sigma^k / k \in \mathbb{N}\}$. Comprobar que H es un subgrupo de S_8 y calcular su orden.

<u>2ª forma</u>: $H = \{\sigma^k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq S_8$, $H \neq \emptyset$ $(\sigma^0 = I,\ I \in H)$

$H \leq G \iff$ ¿$(\forall a, b \in H \Rightarrow a * b' \in H)$?

$$\left.\begin{array}{ll} a = \sigma^{k_1} & k_1 \in \mathbb{N} \\ b = \sigma^{k_2} & k_2 \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow a * b' = a \circ b^{-1} \overset{?}{\in} H$$

$$a \circ b^{-1} = \sigma^{k_1} \circ (\sigma^{k_2})^{-1} = \sigma^{k_1} \circ \sigma^{-k_2} = (\sigma^{k_1})(\sigma^{-1})^{k_2} =$$

Como $\sigma^2 = I$ $\quad \sigma \circ \sigma = I \Rightarrow \boxed{\sigma^{-1} = \sigma}$

$$= \sigma^{k_1} \circ \sigma^{k_2} = \sigma^{k_1 + k_2} = \sigma^k \in H$$

Tomo $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{N}$ $\qquad$ Así $H \leq S_8$

c.q.d