Ejercicio: Dado el siguiente polinomio,

$$p(x) = -x + x^2 + 5x^3 + x^4 + 6x^5,$$

a) Factorizarlo y calcular sus raíces en $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$, sabiendo que sólo tiene una raíz entera.

$$p(x) = x(6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1)$$

$x = 0$ es una raiz de $p(x)$

El teorema de Descartes nos dice que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ es una raiz de $p(x)$ si a es divisor de a_0 y b es un divisor de a_n.

$a_0 = -1 \longrightarrow a = \pm 1$

$a_4 = 6 \longrightarrow b = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Las posibles raices en $\mathbb{Q} = \{\pm \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}\}$

Regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc} & 6 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \downarrow & 3 & 2 & \frac{7}{2} & \frac{9}{4} \\ \hline & 6 & 4 & 7 & \frac{9}{2} & \neq 0 \end{array} \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ no es raiz de } p(x)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 6 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \downarrow & -3 & 1 & -3 & 1 \\ \hline & 6 & -2 & 6 & -2 & \boxed{0} \\ \frac{1}{3} & \downarrow & 2 & 0 & 2 & \\ \hline & 6 & 0 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$-\frac{1}{2}$ es una raiz de $p(x)$

$\frac{1}{3}$ es raiz de $p(x)$

$$p(x) = x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(6x^2+6) =$$

$$= 6x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+1)$$

$$x^2+1=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i \in \mathbb{C}$$

Factorización en $\mathbb{C}[x]$

$$p(x) = 6x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-i)(x+i)$$

Raices $\mathbb{C}[x]$

$0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, i, -i$

Factorización en $\mathbb{R}[x]$

$$p(x) = 6x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+1)$$

Raices $\mathbb{R}[x]$

$0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

Raices $\mathbb{Z}[x]$

0

Factorización en $\mathbb{Z}[x]$

$$p(x) = 2\cdot 3\, x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+1) =$$

$$= x(2x+1)(3x-1)(x^2+1)$$

Factorizar en $\mathbb{Z}_5[x]$

en $\mathbb{Z}_5[x]$

$$p(x) = 6x^5+x^4+5x^3+x^2-x \rightsquigarrow p(x) = x^5+x^4+x^2+4x$$

$$p(x) = x\underbrace{(x^4+x^3+x+4)}_{q(x)} \rightsquigarrow 0 \text{ es raiz de } p(x)$$

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$q(1) = 1^4+1^3+1+4 = 2 \neq 0 \rightarrow 1 \text{ no es raiz}$$

$$q(2) = 2^4+2^3+2+4 = 0 \rightarrow 2 \text{ es raiz de } q(x)$$

Aplicamos de nuevo Ruffini:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\
2 & \downarrow & 2 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & 1 & 3 & 1 & 3 & \boxed{0} \\
2 & \downarrow & 2 & 0 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \\
2 & \downarrow & 2 & 4 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & & \\
3 & \downarrow & 3 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \longrightarrow
\begin{array}{l} 2 \text{ es raiz triple} \\ 3 \text{ es raiz simple} \end{array}
$$

$$p(x) = x\,(x-2)^3(x-3) = \overbrace{x\,(x+3)^3(x+2)}^{\text{Factorización en } \mathbb{Z}_5[x]}$$

Raices en $\mathbb{Z}_5 \Longrightarrow 0, 2, 3$

multiplicidad=3

b) Definir polinomio irreducible en el anillo de polinomios y determinar los elementos irreducibles que aparecen en la factorización de p(x) en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{Z}[x]$.

Un polinomio $p(x)$ en $A[x]$ no nulo y que no es una unidad en $A[x]$ es irreducible en $A[x]$ si para cualquier descomposición de $p(x)$ de la forma $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$ verifica que $p_1(x)$ es una unidad o $p_2(x)$ es una unidad.

Recordar que si A es un dominio de integridad entonces $\mathcal{U}(A[x]) = \mathcal{U}(A)$, donde un dominio de integridad (D.I.) es un anillo si divisores de cero, es decir, si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

$\mathbb{R}$ como $\mathbb{Z}$ son D.I. $\Rightarrow$ $\mathcal{U}(\mathbb{R}[x]) = \mathcal{U}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$

$\mathcal{U}(\mathbb{Z}[x]) = \mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$

$p(x) = 6\, x \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x^2+1)$ en $\mathbb{R}[x]$

$p(x) = x\,(2x+1)(3x-1)(x^2+1)$ en $\mathbb{Z}[x]$.