Ejercicio: Consideremos el grupo $\mathbb{C}^2$ y el subconjunto $H = \{(x, y) / ix + y = 0\}$.

i) Razonar que H es un subgrupo del grupo $\mathbb{C}^2$.

ii) Calcular un subgrupo propio de H.

Sea $(G, *)$ un grupo. Un subconjunto $\emptyset \neq H \subseteq G$ es un <u>subgrupo</u> si verifica:

i) El elemento neutro e de G está en H ($e \in H$).

ii) $\forall h \in H$, su simétrico h' en G está en H ($h' \in H$).

iii) $\forall h_1, h_2 \in H$, al operarlos con la operación del grupo $*$ sigue estando en H ($h_1 * h_2 \in H$).

es decir, H contiene al neutro del grupo y es cerrado para simétricos y para la operación de G.

<u>CARACTERIZACIÓN</u>

$\emptyset \neq H \subseteq G$ es un subgrupo si y sólo si $\forall h_1, h_2 \in H$, se verifica que $h_1 * h_2' \in H$.

$(\mathbb{C}^2, +)$ es grupo abeliano

i) $(0,0) \in H$ ✓ $\quad i.0 + 0 = 0$

ii) $(x, y) \in H \rightsquigarrow (-x, -y) \overset{?}{\in} H$

$ix + y = 0 \qquad \overline{i(-x) + (-y)} = -(ix + y) = -0 = \underline{\underline{0}}$

iii) $\left.\begin{array}{l} h_1 = (x_1, y_1) \\ h_2 = (x_2, y_2) \end{array}\right\} \in H \implies h_1 * h_2 \overset{?}{\in} H$

$\downarrow$

$i x_1 + y_1 = 0$

$i x_2 + y_2 = 0$

$h_1 + h_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$i(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) =$

$= (i x_1 + (i x_2 + y_1)) + y_2 =$

$= (i x_1 + (y_1 + i x_2)) + y_2 =$

$= (i x_1 + y_1) + (i x_2 + y_2) = \underbrace{0 + 0}_{= 0}$

$h_1 + h_2 \in H.$

H es un subgrupo de $\mathbb{C}^2$.

Usando la caracterización:

$h_1, h_2 \in H \implies h_1 + (-h_2) \overset{?}{\in} H$

$h_1 + (-h_2) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) =$

$= (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

$i(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (i x_1 + y_1) - (i x_2 + y_2)$

$= 0 - 0 = 0$

$h_1 + (-h_2) \in H$

$H' = \left\{ (x, y) \,/\, \begin{array}{l} ix + y = 0 \\ y \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $H' \subseteq H$

$H' \neq \{(0,0)\}$

$i = \sqrt{-1}$

$(i, 1) \in H'$

$i \cdot i + 1 = -1 + 1 = 0$

$$H' = \left\{ (x,y) \,/\, \begin{array}{l} ix + y = 0 \\ y \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

i) $(0,0) \in H'$

ii) $(x,y) \in H' \Rightarrow (-x,-y) \in H'$

$\Downarrow$

$y \in \mathbb{Z} \Longrightarrow -y \in \mathbb{Z}$

iii) $\begin{array}{l} (x_1, y_1) \in H' \\ (x_2, y_2) \in H' \end{array} \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in H'$

$\Downarrow$

$y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow y_1 + y_2 \in \mathbb{Z}$