

Ejercicio 3 (Convocatoria ordinaria 1 – curso 2019/20).

Consideremos el conjunto $X = \mathcal{P}(\mathbb{B}_2) \times \mathbb{B}_2$, donde $\mathcal{P}(\mathbb{B}_2)$ es el conjunto de las partes de $\mathbb{B}_2$. Definimos en X el orden:

$(A, a) \leq (B, b)$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $a \leq b$ en $\mathbb{B}_2$

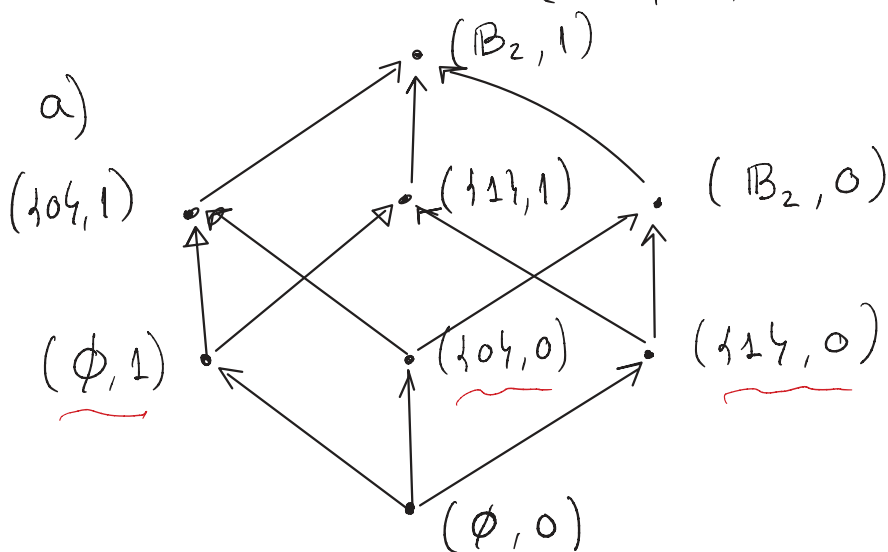
- Calcular el diagrama de Hasse de X .
- Definir átomo. Calcular los átomos del retículo X .
- Enunciar el teorema de estructura de las álgebras de Boole finitas y aplicarlo para razonar si X es un álgebra de Boole.
- Definir complemento de un elemento en un retículo. Calcular el complemento de algún átomo.

$$\mathbb{B}_2 = \{0, 1\}$$



$$\mathcal{P}(\mathbb{B}_2) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \mathbb{B}_2\}$$

$$\bar{X} = \mathcal{P}(\mathbb{B}_2) \times \mathbb{B}_2 = \{(\emptyset, 0), (\emptyset, 1), (\{0\}, 0), (\{0\}, 1), (\{1\}, 0), (\{1\}, 1), (\mathbb{B}_2, 0), (\mathbb{B}_2, 1)\}$$



b) $\mathbb{0} = (\emptyset, 0)$

$$\bar{X} - \{(\emptyset, 0)\}$$

Átomos son $(\emptyset, 1), (\{0\}, 0), (\{1\}, 0)$

c) $\bar{X}$ isomorfo a $\mathcal{P}(M)$

$$\text{card}(\bar{X}) = \text{card}(\mathcal{P}(M)) = 2^3 = 8$$

$$a = (\emptyset, 1)$$

$$b = (10, 0)$$

$$M = \{a, b, c\}$$

$$c = (11, c)$$

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, M\}$$

$$f: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}(M)$$

$$f(\emptyset, 0) = \emptyset$$

$$f(a) = \{a\}$$

$$f(b) = \{b\}$$

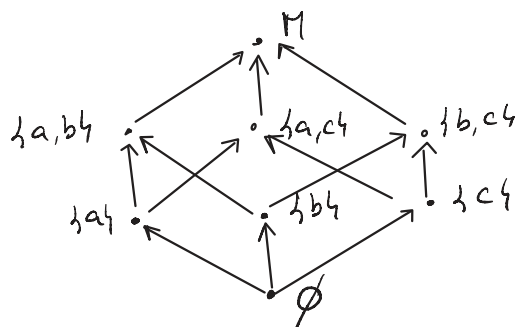
$$f(c) = \{c\}$$

$$f(10, 1) = \{a, b\}$$

$$f(11, 1) = \{a, c\}$$

$$f(B_2, 0) = \{b, c\}$$

$$f(B_2, 1) = M$$



f biyección

isomorfismo de álgebras de Boole

$\Rightarrow \mathcal{X}$ es un álgebra de Boole

$$d) a = (\emptyset, 1) \rightsquigarrow \bar{a} = (B_2, 0)$$

$$\begin{aligned} (\emptyset, 1) \vee (B_2, 0) &= (\emptyset \cup B_2, 1 \vee 0) \\ &= (B_2, 1) = \mathbb{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\emptyset, 1) \wedge (B_2, 0) &= (\emptyset \cap B_2, 1 \wedge 0) \\ &= (\emptyset, 0) = \mathbb{0} \end{aligned}$$