Curso 2020-21. Convocatoria Ordinaria 1. Sea $A = \{a, b\}$. En $X = (P(\emptyset) \times P(A))$, donde $P(\emptyset) \times P(A)$ es el producto cartesiano de los conjuntos de las partes de vacío y A, definimos la relación binaria:

$$(B_1, A_1)\ \mathrm{R}\ (B_2, A_2) \iff B_1 \subseteq B_2 \wedge A_2 \subseteq A_1$$

a) Estudiar, aplicando las propiedades de la inclusión, si R es una relación de orden en X.

b) Dibujar el diagrama de Hasse.

c) Comprobar si es retículo, en caso afirmativo calcular:

$$(\emptyset, \{a\}) + (\emptyset, \{b\}) \quad \text{y} \quad (\emptyset, \{a\}) \cdot (\emptyset, \{b\}).$$

d) Estudiar si es un álgebra de Boole isomorfa a $P(\mathbb{B}_2)$ y, en caso afirmativo, calcular sus átomos.

$P(\phi) = \{\phi\}$, $A = \{a, b\} \Rightarrow P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$X = P(\phi) \times P(A) = \{(\phi, \phi), (\phi, \{a\}), (\phi, \{b\}), (\phi, \{a, b\})\}$

a) R es orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Reflexiva $\forall (B_1, A_1) \in X \Rightarrow ¿(B_1, A_1)\ R\ (B_1, A_1)?$

$¿B_1 \subseteq B_1 \wedge A_1 \subseteq A_1?$ Obvio por la reflexiva

Curso 2020-21. Convocatoria Ordinaria 1. Sea $A = \{a, b\}$. En $X = (P(\varnothing) \times P(A))$, donde $P(\varnothing) \times P(A)$ es el producto cartesiano de los conjuntos de las partes de vacío y A, definimos la relación binaria:

$$(B_1, A_1)\ \mathrm{R}\ (B_2, A_2) \iff B_1 \subseteq B_2 \wedge A_2 \subseteq A_1$$

a) Estudiar, aplicando las propiedades de la inclusión, si R es una relación de orden en X.

b) Dibujar el diagrama de Hasse.

c) Comprobar si es retículo, en caso afirmativo calcular:

$$(\varnothing, \{a\}) + (\varnothing, \{b\}) \quad \text{y} \quad (\varnothing, \{a\}) \cdot (\varnothing, \{b\}).$$

d) Estudiar si es un álgebra de Boole isomorfa a $P(\mathbb{B}_2)$ y, en caso afirmativo, calcular sus átomos.

Antisimétrica : Si $(B_1, A_1)\ R\ (B_2, A_2) \wedge (B_2, A_2)\ R\ (B_1, A_1) \Rightarrow (B_1, A_1) \overset{?}{=} (B_2, A_2)$

$\Updownarrow$

$B_1 \overset{?}{=} B_2 \wedge A_1 \overset{?}{=} A_2$

$B_1 \subseteq B_2 \wedge A_2 \subseteq A_1$

$B_2 \subseteq B_1 \wedge A_1 \subseteq A_2$

$\Downarrow$ Antisimétrica

$B_1 = B_2 \wedge A_2 = A_1$

Curso 2020-21. Convocatoria Ordinaria 1. Sea $A = \{a, b\}$. En $X = (P(\emptyset) \times P(A))$, donde $P(\emptyset) \times P(A)$ es el producto cartesiano de los conjuntos de las partes de vacío y A, definimos la relación binaria:

$$(B_1, A_1)\ \mathrm{R}\ (B_2, A_2) \iff B_1 \subseteq B_2 \wedge A_2 \subseteq A_1$$

a) Estudiar, aplicando las propiedades de la inclusión, si R es una relación de orden en X.

b) Dibujar el diagrama de Hasse.

c) Comprobar si es retículo, en caso afirmativo calcular:

$$(\emptyset, \{a\}) + (\emptyset, \{b\}) \qquad \text{y} \qquad (\emptyset, \{a\}) \cdot (\emptyset, \{b\}).$$

d) Estudiar si es un álgebra de Boole isomorfa a $P(\mathbb{B}_2)$ y, en caso afirmativo, calcular sus átomos.

<u>Transitiva</u> Si $\left.\begin{array}{l}(B_1, A_1)\ R\ (B_2, A_2) \\ \wedge \\ (B_2, A_2)\ R\ (B_3, A_3)\end{array}\right\} \Rightarrow$ ¿$(B_1, A_1)\ R\ (B_3, A_3)$?

$\Updownarrow$

¿$B_1 \subseteq B_3 \wedge A_3 \subseteq A_1$?

$\left.\begin{array}{l}B_1 \subseteq B_2 \quad \wedge \quad A_2 \subseteq A_1 \\ B_2 \subseteq B_3 \quad \wedge \quad A_3 \subseteq A_2\end{array}\right\} \Rightarrow A_3 \subseteq A_2 \wedge A_2 \subseteq A_1$

$\Downarrow$ Transitiva de la inclusión

$B_1 \subseteq B_3 \quad \wedge \quad A_3 \subseteq A_1$

$\Downarrow$ Transitiva de la inclusión

Curso 2020-21. Convocatoria Ordinaria 1. Sea $A = \{a, b\}$. En $X = (P(\emptyset) \times P(A))$, donde $P(\emptyset) \times P(A)$ es el producto cartesiano de los conjuntos de las partes de vacío y A, definimos la relación binaria:

$$(B_1, A_1)\ \mathrm{R}\ (B_2, A_2) \iff B_1 \subseteq B_2 \wedge A_2 \subseteq A_1$$

a) Estudiar, aplicando las propiedades de la inclusión, si R es una relación de orden en X.

b) Dibujar el diagrama de Hasse.

c) Comprobar si es retículo, en caso afirmativo calcular:

$$(\emptyset, \{a\}) + (\emptyset, \{b\}) \qquad \text{y} \qquad (\emptyset, \{a\}) \cdot (\emptyset, \{b\}).$$

d) Estudiar si es un álgebra de Boole isomorfa a $P(\mathbb{B}_2)$ y, en caso afirmativo, calcular sus átomos.

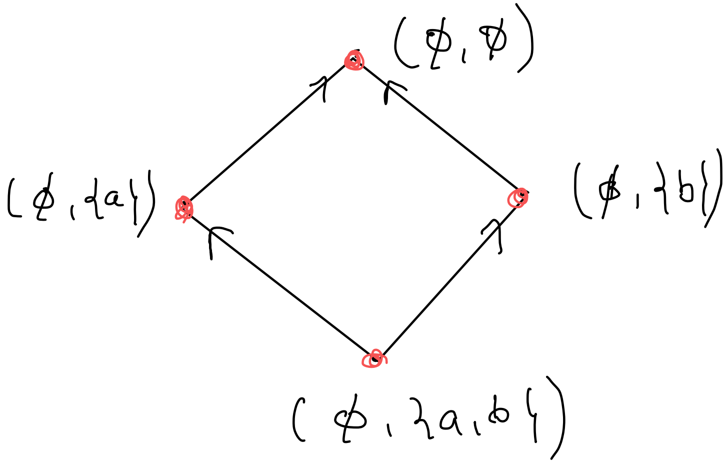
$X = P(\emptyset) \times P(A) = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\}), (\emptyset, \{a, b\})\}$

$(\emptyset, \emptyset)$ $\qquad \emptyset \subseteq \emptyset$

$(\emptyset, \{a, b\})$ $\qquad \emptyset \subseteq \{a, b\}$

$\Downarrow$

$(\emptyset, \{a, b\})\ R\ (\emptyset, \emptyset)$



Curso 2020-21. Convocatoria Ordinaria 1. Sea $A = \{a, b\}$. En $X = (P(\emptyset) \times P(A))$, donde $P(\emptyset) \times P(A)$ es el producto cartesiano de los conjuntos de las partes de vacío y A, definimos la relación binaria:

$$(B_1, A_1)\ \mathrm{R}\ (B_2, A_2) \iff B_1 \subseteq B_2 \wedge A_2 \subseteq A_1$$

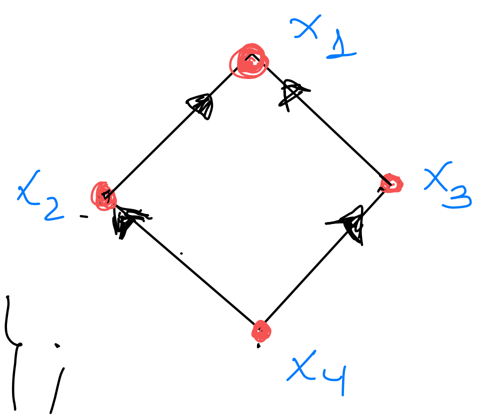
a) Estudiar, aplicando las propiedades de la inclusión, si R es una relación de orden en X.

b) Dibujar el diagrama de Hasse.

c) Comprobar si es retículo, en caso afirmativo calcular:

$$\boxed{(\emptyset, \{a\}) + (\emptyset, \{b\})} \quad \text{y} \quad \boxed{(\emptyset, \{a\}) \cdot (\emptyset, \{b\})}.$$

d) Estudiar si es un álgebra de Boole isomorfa a $P(\mathbb{B}_2)$ y, en caso afirmativo, calcular sus átomos.



$X = P(\emptyset) \times P(A) = \{\underbrace{(\emptyset, \emptyset)}_{x_1}, \underbrace{(\emptyset, \{a\})}_{x_2}, \underbrace{(\emptyset, \{b\})}_{x_3}, \underbrace{(\emptyset, \{a, b\})}_{x_4}\};$

Si R es orden en X y verifica que ¿$\exists \sup\{x, y\}, \inf\{x, y\}\ \forall x, y \in X$?

$\Rightarrow (X, +, \cdot)$ retículo con operaciones $\begin{cases} x + y = \sup\{x, y\} \\ x \cdot y = \inf\{x, y\} \end{cases}$

+ = sup	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
x_3	x_1	x_1	x_3	x_3
x_4	x_1	x_2	x_3	x_4

· = inf	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	x_2	x_2	x_4	x_4
x_3	x_3	x_4	x_3	x_4
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

$\exists$ supremo e ínfimo de cuales quiera dos elemen

$\Downarrow$

$(X, +, \cdot)$ retículo

$x_2 + x_3 = x_1$

$x_2 \cdot x_3 = x_4$

Curso 2020-21. Convocatoria Ordinaria 1. Sea $A = \{a, b\}$. En $X = (P(\varnothing) \times P(A))$, donde $P(\varnothing) \times P(A)$ es el producto cartesiano de los conjuntos de las partes de vacío y A, definimos la relación binaria:

$$(B_1, A_1)\ \mathrm{R}\ (B_2, A_2) \iff B_1 \subseteq B_2 \wedge A_2 \subseteq A_1$$

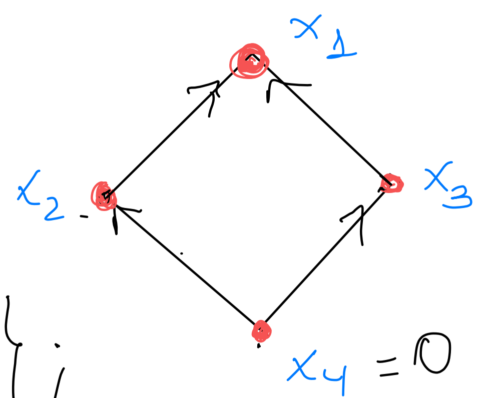
a) Estudiar, aplicando las propiedades de la inclusión, si R es una relación de orden en X.

b) Dibujar el diagrama de Hasse.

c) Comprobar si es retículo, en caso afirmativo calcular:

$$(\varnothing, \{a\}) + (\varnothing, \{b\}) \quad \text{y} \quad (\varnothing, \{a\}) \cdot (\varnothing, \{b\}).$$

d) Estudiar si es un álgebra de Boole isomorfa a $P(\mathbb{B}_2)$ y, en caso afirmativo, calcular sus átomos.



$X = P(\varnothing) \times P(A) = \{\underbrace{(\varnothing, \varnothing)}_{= x_1}, \underbrace{(\varnothing, \{a\})}_{= x_2}, \underbrace{(\varnothing, \{b\})}_{= x_3}, \underbrace{(\varnothing, \{a, b\})}_{= x_4}\}$;

Átomos son los minimales de $X - \{0\}$; esto es, los átomos son x_2 y x_3

X es álgebra de Boole $\iff X \cong \mathbb{B}_2^n$ $\quad n = \text{n}^{\circ}\ \text{átomos} = 2$

$\Updownarrow$

$X \cong \mathbb{B}_2^2$ (X es álgebra de Boole)

$X \overset{?}{\cong} P(\mathbb{B}_2) \cong \mathbb{B}_2^2$

álgebra de Boole

$P(\mathbb{B}_2) \cong \mathbb{B}_2^2 \cong X \implies X \cong P(\mathbb{B}_2)$

c.q.d.