

Ejercicio 3 (Convocatoria extraordinaria 2 – curso 2018/19).

Enunciar y utilizar el Teorema Chino del Resto para resolver el siguiente problema:

“En la nueva sede de la biblioteca de cierto municipio hay un número de libros desconocido. Cuando los colocamos en estantes de 20 libros, rellenamos un número concreto de estantes y nos sobran 5 libros. Cuando los colocamos en estantes de 21 nos faltan 10 para rellenar completamente un número exacto de estantes. Por último, se sabe en el traslado a la nueva sede los libros se transportaron en cajas, todas ellas llenas con el mismo número de libros. No nos han dicho cuántos libros llevaba cada caja sólo sabemos que dicho número es el décimo primo positivo. ¿Cuántos libros hay en la biblioteca si sabemos que hay más de 10000 y menos de 15000?”

$x = n^{\circ}$ libros de la biblioteca

$$x - 5 = 20k \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{20}$$

$$x + 10 = 21k' \Rightarrow x \equiv -10 \pmod{21} \equiv 11 \pmod{21}$$
$$-10 = \overline{21-10} = \overline{11} \text{ en } \mathbb{Z}_{21}$$

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \underline{29}$$

$$x = 29k'' \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{29}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 5 \pmod{20} \\ x \equiv 11 \pmod{21} \\ x \equiv 0 \pmod{29} \end{array} \right\} \begin{array}{ll} a_1 = 5 & m_1 = 20 \\ a_2 = 11 & m_2 = 21 \\ a_3 = 0 & m_3 = 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (20, 29) = 1 & (21, 29) = 1 \\ (20, 21) = 1 & \begin{array}{l} 20 = 2^2 \cdot 5 \\ 21 = 3 \cdot 7 \end{array} \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{\exists \text{ solución}}}$$

Paso 1: $M_1 = 1$

$$M_2 = 20$$

$$M_3 = m_1 \cdot m_2 = 20 \cdot 21 = 420$$

Paso 2: $u_k \in \mathbb{Z}$

$$u_k \cdot M_k \equiv 1 \pmod{m_k} \quad \forall k=1, 2, 3$$

$$\overline{u_k} \cdot \overline{M_k} = \overline{1} \text{ en } \mathbb{Z}_{m_k}$$

$$\underline{u_1 = 1}$$

$$u_2 = (\overline{20})^{-1} \text{ en } \mathbb{Z}_{21}$$

$$\underline{u_2 = 20}$$

$$21 = 20 \cdot 1 + \textcircled{1} \rightarrow 1 = 21 + 20 \cdot \textcircled{-1}$$

$$20 = 1 \cdot 20 + 0$$

$$\overline{-1} = \overline{21-1} = \overline{20}$$

$$u_3 = \left(\overline{420} \right)^{-1} \text{ en } \mathbb{Z}_{29} \quad 420 = 29 \cdot 14 + 14$$

$$\left(\overline{14} \right)^{-1} = \overline{27}$$

$$\underline{u_3 = 27}$$

$$29 = 14 \cdot 2 + \textcircled{1} \rightarrow 1 = 29 + 14(-2)$$

$$14 = 1 \cdot 14 + 0$$

$$\underline{-2} = \overline{29-2} = \overline{27} \text{ en } \mathbb{Z}_{29}$$

Paso 3: $b_1 \in \mathbb{Z} \quad b_1 \equiv a_1 \pmod{m_1}$

$$b_1 = a_1 = 5$$

Paso 4: $w_k \equiv (a_k - b_{k-1}) u_k \pmod{m_k}$

$$k = 2, 3$$

$$b_k = b_{k-1} + w_k \cdot M_k$$

$$w_2 \equiv (11 - 5) \cdot 20 \pmod{21} \equiv 120 \pmod{21}$$

$$\equiv 15 \pmod{21}$$

$$120 = 21 \cdot 5 + 15$$

$$\Rightarrow \underline{w_2 = 15}$$

$$b_2 = 5 + 15 \cdot 20 = \underline{305}$$

$$w_3 \equiv (0 - 305) \cdot 27 \pmod{29} \equiv -8235 \pmod{29}$$

$$\equiv 1 \pmod{29}$$

$$-8235 = 29 \cdot (-284) + 1$$

$$\Rightarrow$$

$$w_3 = 1$$

$$b_3 = 305 + 1 \cdot 420 = 725$$

Paso 5: $x_0 = 725$

Paso 6: $x \equiv 725 \pmod{12180} \Rightarrow x = 725 + t(12180)$
 $\forall t \in \mathbb{Z}$

$$10.000 < x < 15.000$$

$$t=1 \Rightarrow x = 725 + 12180 = 12905$$

$$t=2 \Rightarrow x = 725 + 2 \cdot 12180 > 15000$$

$$\underline{x = 12905 \text{ libras}}$$

$$x \equiv 5 \pmod{20}$$

$$x \equiv 11 \pmod{21}$$

$$x \equiv 0 \pmod{29}$$

$$12905 = 20 \cdot 645 + \underline{\underline{5}}$$

$$12905 = 21 \cdot 614 + \underline{\underline{11}}$$

$$12905 = 29 \cdot 445 + \underline{\underline{0}}$$

$$x = 12905 \text{ libras}$$