Curso 2018-19. Convocatoria Extraordinaria 2. (Temas 2, 3 y 4)

Sea D el conjunto de los divisores positivos de 120 y X el subconjunto cuyos elementos son los elementos de D menores o iguales a 10, consideramos en D la relación binaria dada por

$$a\ R\ b \text{ si y sólo si } b \text{ es un divisor de } a$$

Se pide:

a) Determinar, de forma analítica, que R induce en el subconjunto X una relación de orden.

b) Obtener el diagrama de Hasse del conjunto ordenado X con la relación de orden inducida por R.

c) Definir y calcular, si existen, cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo, mínimo y elementos maximales y minimales de X.

d) Enunciar el teorema de estructura de las álgebras de Boole finitas. Razonar si X con la relación de orden anterior es un álgebra de Boole.

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

$R = \{(10,1), (8,1), - - - - \}$

	2	2^2	2^3
3	6	12	24
5	10	20	40
15	30	60	120

Sea D el conjunto de los divisores positivos de 120 y X el subconjunto cuyos elementos son los elementos de D menores o iguales a 10, consideramos en D la relación binaria dada por

aRb si y sólo si b es un divisor de a

a) Determinar, de forma analítica, que R induce en el subconjunto X una relación de orden.

R orden sii R es reflexiva, antisimétrica y transitiva

R reflexiva sii $\forall a \in X \Rightarrow ¿aRa?$ es decir $a|a \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z}$ t.q $a = ac$, $c = 1$

R antisimétrica: Si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a \overset{?}{=} b$

Si $aRb \Leftrightarrow b|a \Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{Z}$ t.q $a \overset{(1)}{=} bc_1$

Si $bRa \Leftrightarrow a|b \Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{Z}$ t.q $b \overset{(2)}{=} ac_2$

$a \overset{(1)}{=} bc_1 \overset{(2)}{=} (ac_2)c_1 \overset{\text{Asoc.}}{=} a(c_2c_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow c_2c_1 = 1$ $\quad c_1 = c_2 = \pm 1 \Rightarrow a \overset{(1)}{=} bc_1 \xrightarrow{a, b \text{ positivos}} c_1 = c_2 = 1 \Rightarrow a = b$

R transitiva: Si $aRb \wedge bRc \Rightarrow ¿aRc?$

$\Updownarrow$

$¿c|a? \Leftrightarrow ¿\exists d \in \mathbb{Z}$ $a = dc$?

Como $aRb \Leftrightarrow b|a \Leftrightarrow \exists d_1 \in \mathbb{Z}$ t.q $a \overset{(3)}{=} bd_1$

Como $bRc \Leftrightarrow c|b \Leftrightarrow \exists d_2 \in \mathbb{Z}$ t.q $b \overset{(4)}{=} cd_2$

$a \overset{(3)}{=} bd_1 \overset{(4)}{=} (cd_2)d_1 = c(d_2d_1)$

Tomo $d = d_2d_1 \in \mathbb{Z}$ y $a = c \cdot d$.

Sea D el conjunto de los divisores positivos de 120 y X el subconjunto cuyos elementos son los elementos de D menores o iguales a 10, consideramos en D la relación binaria dada por

aRb si y sólo si b es un divisor de a

b) Obtener el diagrama de Hasse del conjunto ordenado X con la relación inducida por R.

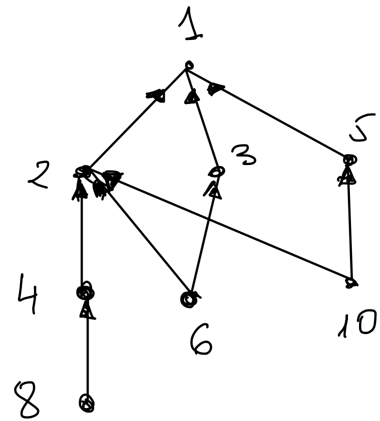
$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

$aRb \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow b \mid a$

$10 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \mid 10$

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$



Sea D el conjunto de los divisores positivos de 120 y X el subconjunto cuyos elementos son los elementos de D menores o iguales a 10, consideramos en D la relación binaria dada por

aRb si y sólo si b es un divisor de a

c) Definir y calcular, si existen, cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo, mínimo y elementos maximales y mínimales de X.

Cota superior de X : $d \in D \quad d \geq a \ \forall a \in X$

$\boxed{1 \in D}$: $1 \geq 1,\ 1 \geq 2,\ 1 \geq 3,\ 1 \geq 4,\ 1 \geq 5,\ 1 \geq 6,\ 1 \geq 8,\ 1 \geq 10$

$2 \in D$: $\cancel{2 \geq 1}$ → No

$d = 3, 4, 6, \ldots, 120$ $\quad \cancel{d \geq 1}$ → No son cota sup.

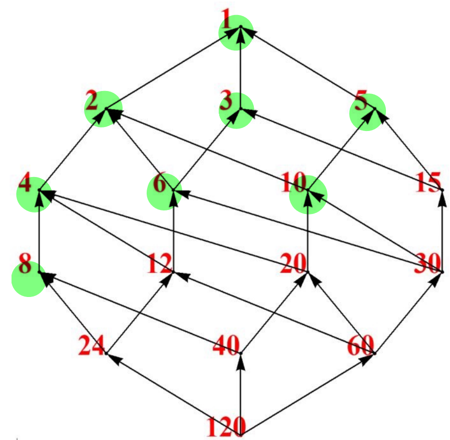
$\{1\}$ cota superiores

Supremo de X $\quad$ Mínimo de $\{1\} = 1$ es supremo

Máximo de X : 1 cota superior $\wedge$ $1 \in X$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 es máximo de X

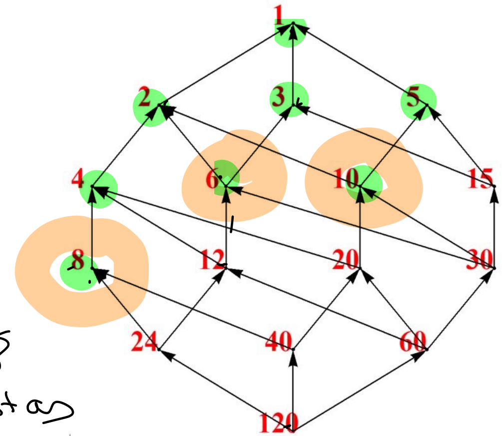
Maximales de X, $\quad 1 \in X \quad$ 1 es maximal



Sea D el conjunto de los divisores positivos de 120 y X el subconjunto cuyos elementos son los elementos de D menores o iguales a 10, consideramos en D la relación binaria dada por

aRb si y sólo si b es un divisor de a

c) Definir y calcular, si existen, cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo, mínimo y elementos maximales y mínimales de X.



Cotas inferiores de X : $d \in D : d \leq a \ \forall a \in X$

$120 \in D$: $120 \leq 1$, $120 \leq 2$, $120 \leq 3$, $120 \leq 4$, $120 \leq 5$, $120 \leq 6$, $120 \leq 8$, $120 \leq 10$

$24 \in D$ $\quad \cancel{24 \leq 10} \rightarrow$ No

$40 \in D$ $\quad 40 \not\leq 6 \rightarrow$ No

$60 \in D$ $\quad \cancel{60 \leq 8} \rightarrow$ No

$8 \in D$ $\quad \cancel{8 \leq 6}$, $\cancel{12 \leq 8}$, $\cancel{20 \leq 8}$ $\cancel{30 \leq 8}$

$d = 4, 6, 10, 15, 2, 3, 5, 1 \Rightarrow \cancel{d \leq 8} \rightarrow$ No son cotas

Ínfimo de X : Máximo $\{120\} \Rightarrow$ Ínfimo 120

Mínimo de X : Cota inferior $= 120$ pero $120 \notin X \Rightarrow \nexists$ mínimo

Minimales de X : $8, 6, 10 \in X$ y no hay ninguno de X menor estricto que él

Sea D el conjunto de los divisores positivos de 120 y X el subconjunto cuyos elementos son los elementos de D menores o iguales a 10, consideramos en D la relación binaria dada por

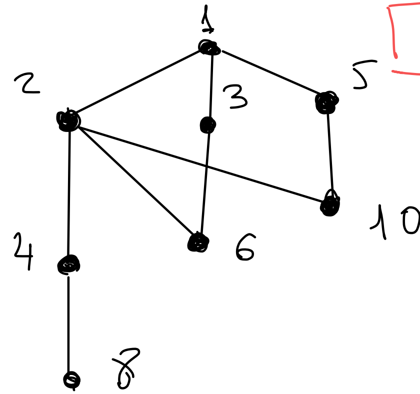
aRb si y sólo si b es un divisor de a

d) Enunciar el teorema de estructura de las álgebras de Boole finitas. Razonar si X con la relación de orden anterior es un álgebra de Boole.

¿ X retículo ? : $\forall a,b \in X \Rightarrow \exists \sup\{a,b\}, \inf\{a,b\}$

$\nexists (\inf\{8,6\}) \notin X \Rightarrow X$ no retículo $\Rightarrow$

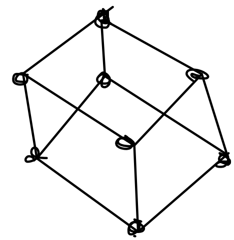
$\Rightarrow X$ no es álgebra de Boole



$\boxed{X}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Th: } L \text{ es álgebra de Boole finita} \Rightarrow \\ \Rightarrow L \cong B_2^n \text{ siendo } n = \text{nº átomos} \end{array}}$$

$\text{Card}(X) = 8 = 2^3 \Rightarrow \cancel{X \cong B_2^3}$



$\boxed{B_2^3}$