

Diagramas para la comprensión matemática

Estudio de caso en personas con trastorno del espectro autista

ISSN: 1130-0876

Recepción: diciembre 2008

Aceptación: enero 2009

Miguel Llorca Llinares
Inés del Carmen Plasencia Cruz
Plácida Rodríguez Hernández
(Universidad de La Laguna)

RESUMEN

En el presente artículo explicamos una experiencia de trabajo realizada con un niño con autismo, en la que tratamos de buscar estrategias que faciliten el aprendizaje de los conceptos matemáticos para su aplicación a la vida diaria, partiendo de los contenidos de 4º de primaria, curso en el que encontraba el alumno. En el caso que presentamos, los apoyos visuales y los diagramas han sido una ayuda para la resolución de problemas matemáticos, presentándose las dificultades más en el ámbito del lenguaje, que en la comprensión de los conceptos, ya que los enunciados en ocasiones le resultan incompresibles, siendo necesario modificarlos, sobre todo en lo referente a los tiempos verbales, para facilitar su comprensión.

PALABRAS CLAVE

Espectro autista, apoyos visuales, diagramas lineales, problemas matemáticos.

ABSTRACT

In this article we explain an experience carried out work with a child with autism, in which we try to find strategies that facilitate the learning of mathematical concepts for their application to everyday life, based on the contents of 4 th primary course which was the student. In this case, supports visual and diagrams have been a help in solving mathematical problems, showing more difficulties in the area of language, that in understand the concepts, due to the statements in occasion are incompressible to him, been necessary modify them, especially with regard to the tenses, to facilitate their understanding.

KEY WORDS

Autism spectrum, visual aids, lineal diagrams, mathematical problems.

(pp. 79-90)

Introducción

En nuestra experiencia profesional, vinculada al ámbito de las necesidades educativas específicas, un objetivo prioritario siempre ha sido procurar que los aprendizajes sean lo más funcionales posible, de manera que los conocimientos adquiridos en la escuela puedan ser transferidos y utilizados en la vida diaria, facilitando una mejor inclusión social y laboral. Por otra parte, es una realidad innegable que el cambio de actitudes hacia las personas con discapacidad y los avances legislativos en materia de integración educativa y laboral ha sido propiciado por la presión y constancia de las madres y padres de estas personas, así como por las asociaciones de los propios afectados, en su exigencia de que se aplique el principio de igualdad de oportunidades.

En la experiencia que presentamos en este artículo se evidencia una vez más esta realidad, siendo un grupo de madres de personas con autismo las que nos han incitado y animado a colaborar en la búsqueda de estrategias que ayuden a sus hijos a progresar en sus aprendizajes escolares y más concretamente a que los conceptos matemáticos sean fácilmente aplicados a la vida diaria, además de que los conocimientos adquiridos permitan la promoción y reconocimiento de sus competencias, porque pese al esfuerzo realizado, en la mayoría de los casos, no se ve compensado con la obtención de la titulación correspondiente.

Hay algunas personas con Trastornos del Espectro Autista que han conseguido reconocimiento social y profesional, ayudando a modificar las actitudes con respecto a estas personas y propiciando que su inclusión educativa sea una realidad en la actualidad, como queda recogida en las experiencias

contadas por sus propios protagonistas, desde la pionera Temple Grandin, hasta las experiencias más cercanas de los educadores y educadoras que se esfuerzan en el día a día para conseguir una verdadera inclusión de todo el alumnado en la vida escolar y su progreso académico.

Sus experiencias nos ayudan a entender su forma específica de aprender y situarse en sociedad (Grandin, 1997; Hall, 2003), nos sorprenden con sus conocimientos y nos emociona con su forma de contarlos y aplicarlos en su quehacer profesional (Grandin y Johnson, 2006), al explicarnos como el autismo puede ayudar a comprender el comportamiento de los animales, o nos acerca a una realidad educativa en la que algunos profesionales, en estrecha colaboración con la familia, se empeñan en demostrar que la diversidad es un valor educativo que hay que aprovechar (Lozano, 2002; Padrón, 2006)

Nuestra experiencia comienza en el curso 2004/05 con un grupo de tres chicos, uno de ellos con Síndrome de Asperger de 19 años, cursando un programa de cualificación profesional inicial, y dos de once años, uno con síndrome de Asperger y otro con autismo, cursando 4º de Primaria. Con el primero de ellos, tratando de desarrollar sus habilidades sociales, nos planteamos la aplicación de los conceptos matemáticos a su vida diaria. Con los otros, objeto de la experiencia a la que nos referimos desde este momento, nos centramos en la utilización de esquemas para resolver problemas.

Teniendo en cuenta las características de las personas con TEA (Rivière, 2002), con dificultades para la simbolización pero buenas habilidades para aprender con apoyos visuales, nos decidimos por utilizar las regletas porque nos permitía que los números (símbolo) tuvieran un referente visual asociado.

Desestimamos el “color” de la regleta como propiedad que variaría en función del número y nos fabricamos nuestras “regletas adaptadas”, ya que, aunque un color para cada número da mayor información visual, el estilo de aprendizaje de muchas de las personas con TEA puede llevarles a un error en la asociación. Es decir, si entendemos que para la comprensión del concepto de “unidad” es esencial el tamaño de la regleta (a mayor número de unidades mayor tamaño de la regleta y al contrario), al añadir el color como propiedad diferenciadora de cada número, puede que la asociación se haga con respecto al color y no al tamaño, siendo éste último mucho más clarificador del concepto de cantidad que el primero.

Una vez eliminada la variable del color, advertimos la necesidad de dividir las regletas en las unidades correspondientes mediante marcadores visuales. Dichos marcadores facilitarán el aprendizaje del significado de los símbolos numéricos y su relación con la cantidad.

Para que visualicen la información, les presentamos las “regletas adaptadas” realizadas con cartulina plastificada (Figura 1).

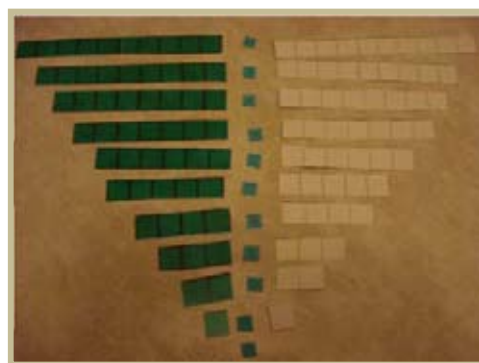
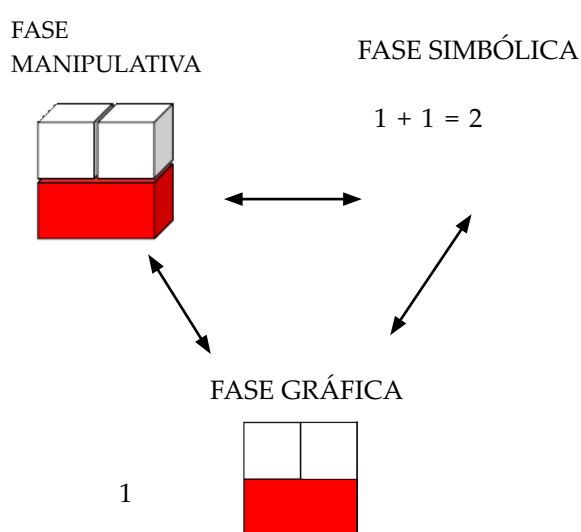


Figura 1

Conocemos por la investigación ya clásica (Bruner; 1967; Dickson; 1991) que la manipulación de objetos *concretos* constituye la base del conocimiento humano en general y de las matemáticas en particular. Las acciones físicas pasan a ser internalizadas y generalizadas en forma de conceptos y relaciones, a las cuales les pueden asociar símbolos, sean palabras o símbolos matemáticos. Con esta idea al trabajar con cualquier material manipulativo y con la finalidad de favorecer la transferencia entre las distintas representaciones de los conceptos matemáticos se pueden trabajar las siguientes fases:



1. *Fase de abordaje* (manipulativa o enactiva): Los niños investigan con las regletas.
2. *Fase icónica* (gráfica, imagen). Los niños, pintarán en una hoja cuadrículada la representación de lo que han investigado en la fase manipulativa.
3. *Fase simbólica* (símbolos). Al principio lo hará el profesor para que los alumnos se vayan familiarizando con ella. $1 + 1 = 2$
4. Si es posible las tres fases juntas, en caso contrario las fases gráfica y simbólica

Para asegurarnos de la comprensión de los conceptos matemáticos básicos, iniciamos el trabajo, partiendo de apoyos visuales, con la utilización de regletas realizando diferentes actividades manipulativas, gráficas y simbólicas, aumentando progresivamente su complejidad, de las que reflejamos algunas de las desarrolladas:

Del 1 al 10

- *Juego libre.* Se presentan las regletas y se permite que juegue libremente para familiarizarse con el material.
- *Fichas con diferentes figuras.* reproducir con regletas. Primero sobre la ficha y luego sin apoyo visual.
- *La escalera.* Contar de mayor a menor y a la inversa.
- *La venta o intercambio del valor de un objeto.* Se aumenta la complejidad intercambiando dos o más objetos y sumando las cantidades al unir las regletas. Se puede introducir las monedas de forma paralela a las regletas, con la intención posterior de aplicar el aprendizaje en una situación real.
- *Descomposición de números.* Utilizando la unidad u otros números se hace una descomposición colocando las regletas que unidas crean el número a descomponer. Se debe repetir la descomposición partiendo de regletas de distintas unidades.
- *Composición de números.* Proceso contrario al anterior. Se muestra un número y se debe descomponer a partir de las regletas que se facilitan.
- *Representación.* Representar la descomposición de forma gráfica utilizando una hoja cuadriculada. Pintar con diferentes colores.
Sumas de dobles (hasta la decena):
1+1, 2+2, 3+3,....

- Restar números. Busca la regleta que le falta para igualar a otra más larga.

Del 10 al 20

- La escalera: A la decena se le añaden las unidades.
- Representación: Representar la decena + las unidades con las regletas y en la hoja cuadriculada, utilizando diferentes colores y escribiendo la cantidad con números y letras: 15=10+5, 17=10+7, 20=10+10
- Construir series numéricas: Sumando o restando un número fijo.
- Tablas de multiplicar (la tabla del 2): Una multiplicación no es mas que una suma en la que todos los sumandos son iguales:
 $2 \times 1 = 2$
 $2 \times 2 = 2 + 2$
 $2 \times 3 = 3 + 3$
 De esta manera se puede representar una multiplicación a partir de la adición de regletas iguales.
- Realizar la escalera con la tabla del 2.
- Cálculo mental de sumas y restas.

Del 20 al 100

- Contar de 10 en 10 hasta la centena: realización del cuadrado con regletas.
- Descomposición: le dices un número y lo representa con regletas.
- Juegos con cartas y dados: sumar dos tiradas y ver quién saca el número más alto.
- Tablas de multiplicar: se pueden trabajar las distintas tablas de multiplicar e incluso crear una escalera con los resultados.

Una vez afianzados los conceptos matemáticos básicos nos planteamos pasar a la resolución de problemas, asociando las operaciones aritméticas con acciones reales.

1. Resolución de problemas

La resolución de ejercicios y problemas es la piedra angular de las matemáticas escolares. Sin la habilidad para resolver problemas, la utilidad y el poder de las ideas matemáticas, y el conocimiento y las destrezas, están gravemente limitados (Estándares Curriculares). El profesor debe enseñar, de forma cooperativa a ser posible, a resolver problemas, introduciendo al alumno en las estrategias generales y específicas que favorecen la resolución de los problemas.

De las muchas descripciones de estrategias para resolver problemas, una de las más conocidas puede encontrarse en el trabajo de Polya (1957). Estas estrategias, frecuentemente citadas, incluyen: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar marcha atrás, tantear y comprobar, crear un problema equivalente y crear un problema más sencillo. Las capacidades que se deben desarrollar son:

- Reconocer y formular problemas,
- desarrollar y aplicar diversas estrategias,
- verificar e interpretar conclusiones,
- generalizar soluciones y estrategias,
- aplicar el proceso a situaciones problemáticas del mundo real.

La incorporación de las competencias básicas al currículo permiten poner el acento en aquellos aprendizajes que se consideren imprescindibles, concretándose en la LOE que la competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las

formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cualitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

Las dificultades encontradas en la resolución de problemas matemáticos son muy comunes entre la población estudiantil, aunque en el caso de las personas con TEA se complican por sus dificultades en el lenguaje, sobre todo en la comprensión, en los casos que nos ocupa; o porque la información facilitada no está contextualizada a su entorno o intereses más cercanos:

- El enunciado es confuso.
- Falta de comprensión lectora.
- Términos desconocidos en el enunciado.
- El contexto del problema no es familiar.
- Que haya datos que se tengan que deducir del enunciado.
- No distingue bien la pregunta o preguntas del problema.
- No distingue los datos conocidos.

Ante estas dificultades decidimos simplificar el enunciado de los problemas, cambiando las palabras confusas y organizando inicialmente la secuencia a seguir para la resolución del problema.

2. Diagramas

Como recurso complementario a las regletas empezamos a utilizar de forma paralela los Diagramas Lineales. Un Diagrama es una representación visual de información en un esquema espacial (). Las redes consisten en un grupo de pun-

tos unidos por líneas que emanan desde cada punto (como un mapa de estaciones de tren). Las redes simples con pocos puntos y líneas son conocidas como Diagramas Lineales.

Al iniciar la utilización de diagramas lineales con Edu, sujeto de esta experiencia, ya estaba muy familiarizado con el uso de las regletas y le gustaba poner al lado de cada una de ellas un cuadradito azul con el número correspondiente, lo que nos permite trabajar a la vez el número y la cantidad.

Para trabajar la resta utilizamos unas regletas de transparencia azul que indica la cantidad que se resta. Colocamos la regleta azul que hace las veces de sustraendo sobre la regleta blanca que es el minuendo, trabajando a la vez con los números. Ni la suma ni la resta supuso ninguna dificultad para él.

3. Problemas aritméticos verbales

En las últimas décadas se ha asistido a una proliferación de estudios sobre el problema de la clasificación semántica de los problemas verbales, especialmente de los aritméticos (Nesher, 1980; Carpenter et als.; 1981; Nesher, et als. 1982; Carpenter et als. 1999). Aunque estas clasificaciones difieren en los detalles que permiten distinguir unos problemas aritméticos verbales de otros, coinciden en la generalidad. En este trabajo hemos usado la clasificación realizada por Carpenter et als (1999) para la que es esencial identificar el tipo de acción o de relaciones utilizadas por los niños y niñas al resolver los problemas.

Las categorías utilizadas por Carpenter et als (1999) para los problemas verbales de suma y resta son: *cambio, combinación y comparación*. En los problemas de cambio se produce una acción y están subdivididos en dos grupos caracterizados por:

- *Cambio creciente*: se añaden elementos, a través de una acción, a una cantidad inicial.
- *Cambio decreciente*: se quitan elementos, a través de una acción, a una cantidad inicial.

A su vez los problemas de cambio creciente y decreciente están divididos en tres prototipos según sea la incógnita del problema:

1. Se da la cantidad inicial y la cantidad de cambio y la incógnita es la cantidad final.
2. Se dan las cantidades inicial y final y se pide encontrar la cantidad de cambio.
3. Se dan la cantidad final y la cantidad de cambio y la incógnita es la cantidad inicial

Reflejamos a continuación las estrategias utilizadas por nuestro sujeto para enfrentarse a la resolución de problemas aditivos.

Los primeros problemas que empezamos a tratar fueron los de cambio creciente. Copiamos los enunciados utilizados, añadiendo entre paréntesis las modificaciones realizadas de algunas palabras o expresiones que resultaban confusas para él. En la práctica tachábamos y modificábamos a lápiz el enunciado original. A continuación del enunciado reflejamos las estrategias empleadas por Edu en la resolución de problemas, utilizando regletas y diagramas lineales.

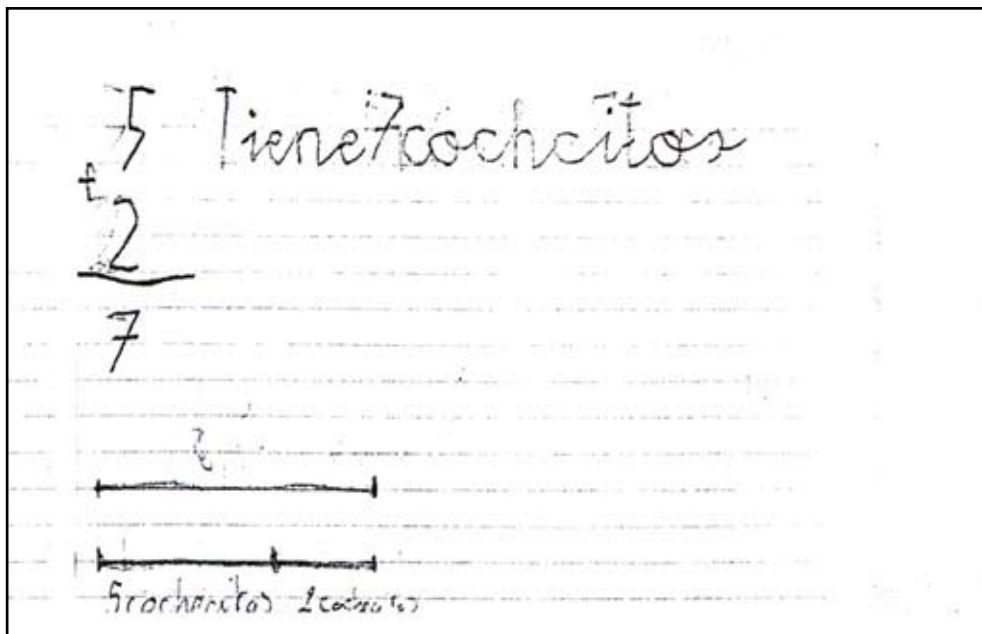
3.1. Problemas aditivos: cambio creciente

Ejemplos de problemas¹ utilizados en esta investigación

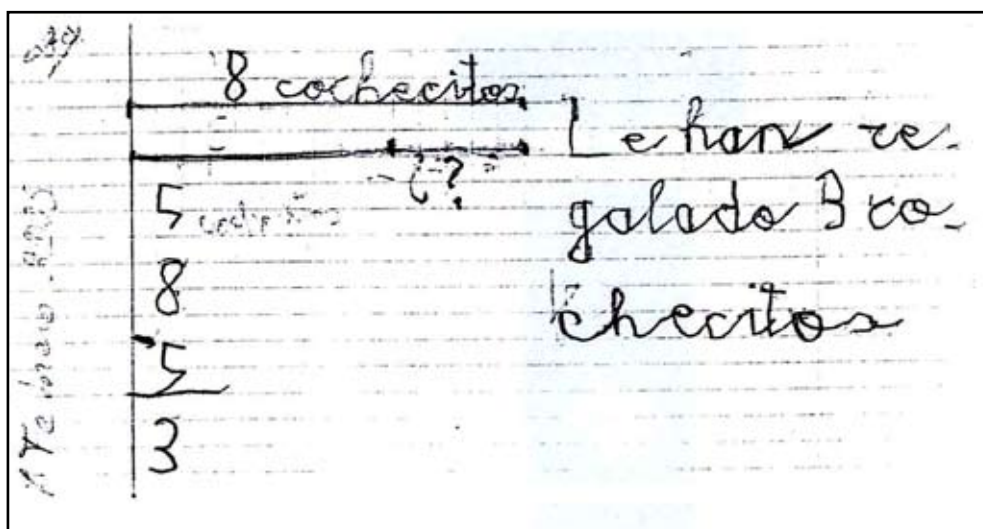
Enunciado del problema

Cantidad final	Rebeca tenía 5 cochecitos de juguete. Sus padres le regalaron dos más en su cumpleaños ¿Cuántos cochecitos tuvo entonces (tiene)?
Cantidad de cambio	Rebeca tenía 5 cochecitos de juguete. Sus padres le regalaron algunos más en su cumpleaños. Ella llegó a tener entonces 8 cochecitos. ¿Cuántos coche de juguete la habían (han) regalado sus padres en su cumpleaños?
Cantidad inicial	Susana tenía algunos cochecitos. Sus padres le regalaron dos más en su cumpleaños. Ella llegó a tener entonces 7 cochecitos. ¿Cuántos cochecitos tenía Susana antes de su cumpleaños?

Resolución del problema



¹ Los ejemplos, utilizados inicialmente en la investigación, han sido adaptados de Carpenter et als (1999).



Lee dos veces el enunciado. No entiende el problema. Hacemos el esquema. Pongo en el tramo desconocido? pero él quiere poner ¿? Necesita algo más de ayuda y utilizamos nuestras regletas. Lo comprende y da la solución del problema, pero tarda algo más en darse cuenta de que debe plantear una resta.

En todos los casos aplicó bien algo que de su unidad y de una frase que indique de su unidad y de una frase que indique claramente el resultado del problema.

3.2. Problemas de cambio decreciente

Enunciado del problema

Cantidad final	Carla tenía 8 caramelos. Dio tres caramelos a Rodrigo. ¿Cuántos caramelos le quedan a Carla?
Cantidad de cambio	Carla tenía 10 caramelos. Dio algunos caramelos a Rodrigo. A carla le quedaron 6 caramelos. ¿Cuántos caramelos había dado (dio) a Rodrigo?
Cantidad inicial	Carla tenía algunos caramelos. Dio tres caramelos a Rodrigo. A carla le quedaron 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Carla al principio?

Resolución del problema

$$\begin{array}{r} 8 \\ - 3 \\ \hline 5 \end{array}$$
 Tiene 5 caramelos los

$$\begin{array}{l} 8 \text{ caramelos} \\ \hline 3 \text{ caramelos} \end{array}$$
 ¿?

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 6 \\ \hline 4 \end{array}$$
 Dio 4 caramelos

$$\begin{array}{l} 10 \text{ caramelos} \\ \hline 6 \end{array}$$
 ¿? 5 caramelos

$$\begin{array}{l} 10 \\ \hline 2 \end{array}$$
 ¿?

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 5 \\ \hline 8 \end{array}$$
 Tiene 8 caramelos los

$$\begin{array}{l} 8 \\ \hline 3 \end{array}$$

En los problemas de combinación y comparación, al contrario que en los problemas de cambio creciente y decreciente, no hay ninguna acción y no se produce ningún cambio en el tiempo. En los primeros se produce una relación estática entre un conjunto particular (total) y dos subconjuntos (partes) disjuntos del mis-

mo. Sólo hay dos tipos diferentes de problemas de combinación:

- Nos dan las dos partes y nos piden que calculemos el total
- Nos dan el total y una de las partes y nos piden que encontremos la otra parte

Incógnita	Ejemplo
Total	Seis chicos y cuatro chicas estaban jugando al fútbol. ¿Cuántos niños había jugando en total?
Parte	Diez niños estaban jugando al fútbol. Seis eran chicos y el resto chicas. ¿Cuántas chicas había?

4. Problemas de comparación

Por último, en los problemas de comparación se produce una comparación entre dos conjuntos disjuntos más que una relación entre un conjunto y sus subconjuntos. Dado que una cantidad se compara

con otra, una de las cantidades recibe el nombre de *cantidad de referencia* y la otra *cantidad comparada*. La tercera cantidad es la diferencia en que un conjunto excede al otro.

Ejemplos de problema según sea la incógnita

Incógnita	Ejemplo
Diferencia	Marcos tiene 3 perros. Yolanda tiene 7 perros. ¿cuántos perros tiene Yolanda más que Marcos?
Cantidad comparada	Marcos tiene tres perros. Yolanda tiene 4 perros más que Marcos. ¿Cuántos perros tiene Yolanda?
Referencia	Yolanda tiene 7 perros. Tiene 4 perros más que Marcos. ¿Cuántos perros tiene Marcos?

Resolución del problema

Marcos: 3 Perros
 Yolanda: 7 Perros

$$\begin{array}{r} 7 \\ - 3 \\ \hline 4 \end{array}$$
 Tiene 4 perros más que Marcos

Marcos: 3 Perros
 Yolanda: 5 Perros

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 5 \\ \hline 8 \end{array}$$
 Tiene 8 perros

Yolanda: 7 Perros
 Marcos: 4

$$\begin{array}{r} 7 \\ - 4 \\ \hline 3 \end{array}$$
 Tiene 3 perros

Estos problemas le resultaron más difíciles, aunque la construcción de los esquemas le ayudó a resolverlos. Entiende su construcción pero aún le falta soltura para construirlos él solo.

Comentarios sobre lo realizado

- Acepta como algo natural resolver los problemas con ayuda del diagrama.

ma. Se da cuenta de que le ayudan a resolver problemas matemáticos.

- Algunas veces la comprensión se ve dificultada por problemas del lenguaje.
- Puede construir los esquemas una vez que utiliza las regletas.
- Tiene claro que la cantidad que debe encontrar se indica con ¿? (le gusta escribirlo).

- La utilización de diagramas rectilíneos con segmentos paralelos le desorienta.
- Entiende mejor el todo y las partes si se utiliza como diagrama una sola raya a la que se añaden llaves.
- Está identificando palabras clave que le ayudan a resolver los problemas: reparte, divide, cuántos quedan, en total, le dan, se rompen...

5. Conclusiones

Hemos constatado la importancia de que confiemos en las posibilidades del alumnado para desarrollar sus competencias. A esto nos han enseñado el propio alumnado con su esfuerzo y las madres con su dedicación y creencias de que su hijo puede progresar. Ha sido muy enriquecedor aprender a amar la vida.

En el caso de Educa, los apoyos visuales y los diagramas han sido una ayuda para la resolución de problemas matemáticos, presentándose las dificultades más en el ámbito del lenguaje, que en la comprensión de los conceptos, ya que los enunciados en ocasiones le resultan incomprensibles, siendo necesario modificarlos, sobre todo en lo referente a los tiempos verbales, para facilitar su comprensión.

Referencias

BRUNER, J. (1967). *Towards a theory of instruction*. Cambridge Mass.: Belknap Press.

Sobre los autores

Miguel Llorca Llinares. Profesor Titular del Departamento de Didáctica e Investigación Educativa de la Universidad de La Laguna.

Inés del Carmen Plasencia Cruz. Profesora del Dpto. de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Plácida Rodríguez Hernández. Profesora del Dpto. de Física Fundamental II. Universidad de La Laguna.

CARPENTER, T.; HIEBERT, J., y MOSER, J. M. (1981). Problem Structure and First-Grade Children Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 23-39.

CARPENTER, T.; FENNEMA, E.; FRANKE, M. L.; LEVI, L., EMPSON, S. (1999). *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

DICKSON, L; BROWN, M; GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Ministerio de Educación y Ciencia

GRANDIN, T. (1997): *Atravesando las puertas del autismo*. Buenos Aires: Paidós.

GRANDIN, T. y JONSON, C. (2006). *Interpretar a los animales*. Barcelona: RBA Libros.

LOZANA, M. T.; CASTILLA, M. y GÓMEZ, A. (2002). *Hacia el habla*. Málaga: Aljibe.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducido por Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla.

NESHER, P. (1980). The Stereotyped Nature of School Word Problems. *For the learning of Mathematic*, 1, 41-48.

NESHER, P; GREENO, J. y RILEY, M. S. (1982). The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373-394.

PADRÓN, P. (2006). *Asperger en el aula*. Madrid: Fundación Universitaria Iberoamericana.

POLYA (1957). *How to solve it*. London: Penguin Books.